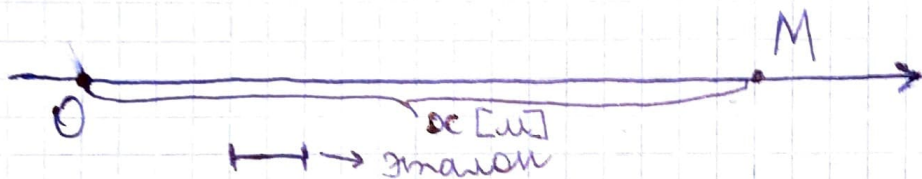


§ 1. Кинематика материальной точки

• Прямолинейное движение точки



а) Для того, чтобы измерить расстояние мы сравним его с длиной некоторого тела, принятого за эталон.

б) Чтобы измерить промежуток времени мы сравним его с продолжительностью некоторого процесса, принятого за эталон.

Единица измерения длины - метр [м]
(расстояние, которое пройдёт свет в вакууме приблизительно за $\frac{1}{300000000}$ с)

Секунда [с] - продолжительность 10^{10} колебаний электрона в атоме цезия.

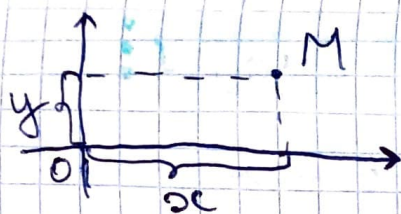
x [м], t [с]

$x = x(t)$ - закон движения

$x = \frac{gt^2}{2}$ - закон свободного падения

• Движение материальной точки на плоскости

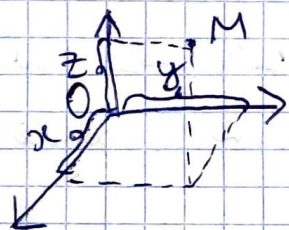
Ось координат - прямая линия, на которой выбрано начало отсчёта, положительное направление и единица измерения длины.



- декартова сис-ма координат

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

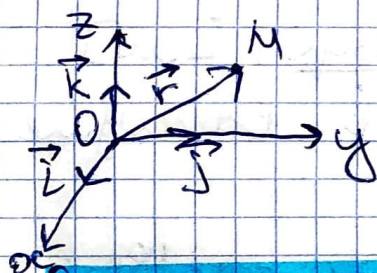
• Движение точки в нр-ве



$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

Радиус-вектор точки -

- это вектор, проведённый от начала отсчёта к данной материальной точке.



$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты

Орты декартовых координат - единичные векторы, направленные вдоль декартовых осей координат

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

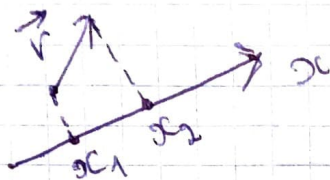
$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

Модуль радиус вектора - это его длина

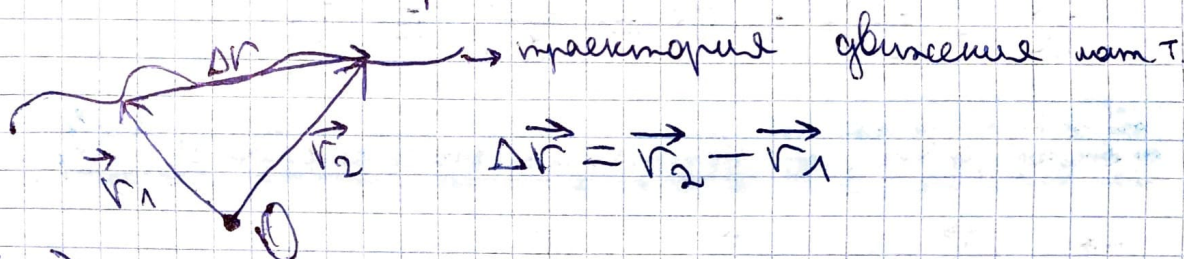
$$|\vec{r}| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad [\text{м}]$$

Проекция вектора на ось - это

разность координат конца и начала вектора, взятые по отношению к данной оси.



Перемещение матер. точки - это разность радиус-векторов точки, взятых в два разных момента времени.



$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$$

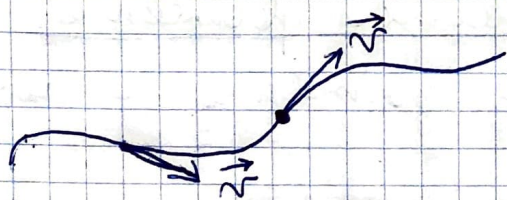
$$\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 - \text{длительность перемещения}$$

Скорость матер. точки - это отношение перемещения точки к его длительности в пределе, когда длительность перемещения стремится к нулю.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$



$\vec{v}$ направлен по касательной к траектории движения

Декартовы компоненты скорости (v_x, v_y, v_z)

$$\vec{v} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$\left[\frac{m}{c} \right]$

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}$$

$$|\vec{v}| \equiv v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \left[\frac{m}{c} \right]$$

Ускорение матер. точки — это производная скорости точки по времени.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}$$

Декартовы канонические ускорения (a_x, a_y, a_z)

$$\vec{a} = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z) = \vec{i} \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y}{dt} + \vec{k} \frac{dv_z}{dt}$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

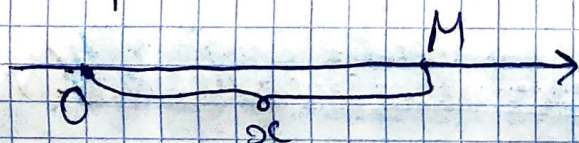
$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

$$\left[\frac{m}{c^2} \right]$$

$$|\vec{a}| \equiv a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

① Равномерное прямолинейное движение.

Равномерным называем движение с постоянной скоростью.



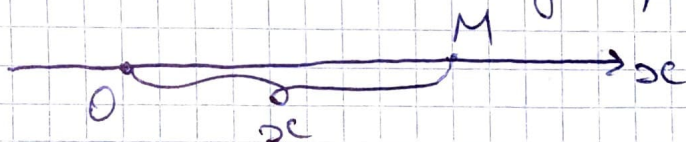
$$v_x = \text{const}! \quad x(t) = ?$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v_x dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_x dt = v_x \int_0^t dt$$

$$x = v_x \cdot t$$

② Равноускоренное прямолинейное движение - движение с постоянным ускорением



$$a_x = \text{const}, \quad v_x = ?, \quad x(t) = ?$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = a_x dt$$

$$\int_0^t dv_x = \int_0^t a_x dt = a_x \int_0^t dt$$

$$\boxed{v_x = a_x t} \quad ! \quad x(t) = ?$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_x dt = \int_0^t a_x t dt = a_x \int_0^t t dt$$

$$\boxed{x = a_x \frac{t^2}{2}}$$

$$\boxed{s = a \frac{t^2}{2}}$$

• Измерение ускорения мат. точки

$$a = \frac{2s}{t^2}$$

Свободное падение точки:

$$a = 9,8 \text{ м/с}^2 \equiv g - \text{уск. св. падения}$$

$$\boxed{x = \frac{gt^2}{2}, \quad v_x = gt}$$

§2. Тангенциальное и нормальное ускорение -

составляющие ускорения мат. точки, параллельные вектору скорости и перпендикулярные вектору скорости.

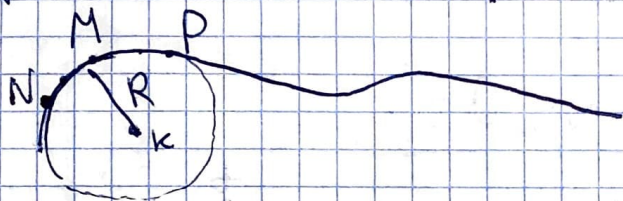


$$\vec{a} = \vec{t} a_t + \vec{n} a_n$$

$$|\vec{t}| = |\vec{n}| = 1$$

Кривая кривизны кривой в точке —

— кривая, проходящая через данную точку M на кривой и две другие точки кривой: N и P в пределах касания $\vec{k}$
 $N \rightarrow M$ и $P \rightarrow M$.



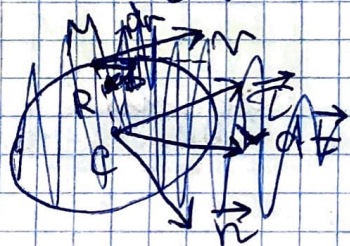
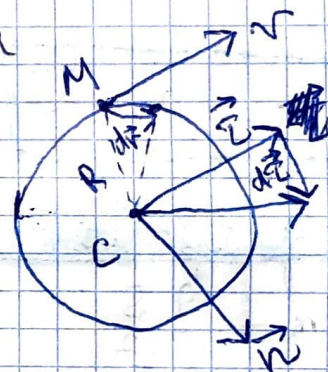
Центр кривизны — центр кривизны.

Радиус кривизны — радиус кривизны

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow \vec{v} = \vec{t} v$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (\vec{t} v) = \vec{t} \frac{dv}{dt} + v \frac{d\vec{t}}{dt}$$



В пределе $\Delta t \rightarrow 0$ направление $d\vec{t}$ совпадает с $\vec{n}$, поэтому

$$d\vec{t} = \vec{n} d\tau$$

т.к. мы рассматриваем, что

$$\frac{d\tau}{|\vec{t}|} = \frac{dv}{R} = d\tau$$

$$d\tau = \frac{dv}{R}$$

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \vec{n} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{dv}{dt} = \vec{n}$$

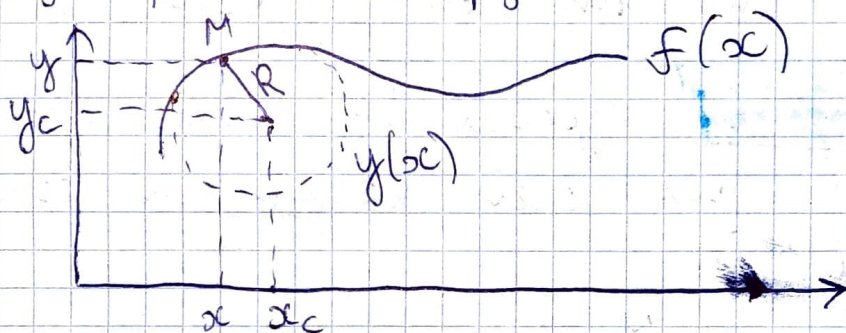
$$d\vec{L} = \vec{n} \cdot \frac{dr}{R}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{n} \cdot \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{dr}{dt}\right) \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \frac{v}{R}$$

$$\vec{a} = \vec{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{R} \vec{n} = \vec{L} a_L + \vec{n} a_n$$

$$a_L = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

Пример вычисления кривизны кривой, заданной в декартовых координатах.



$$\begin{cases} (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = R^2 & (1) \\ y = f(x) & \text{в т.м.} \\ \text{Собравшем касан. в т.м. } y = f(x) \text{ и } y(x): \\ y' = f' \\ y'' = f'' \quad (y(x) \text{ гл. крив. кривизны}) \end{cases}$$

$$2(x-x_c) + 2(y-y_c)y' = 0 \quad (\text{интегрируя (1)})$$

$$(x-x_c) + (y-y_c)y' = 0 \quad \left(\frac{d}{dx}\right)$$

$$1 + y'^2 + (y-y_c)y'' = 0$$

$$y - y_c = -\frac{1+y'^2}{y''}$$

$$x - x_c = \frac{1+y'^2}{y''} y'$$

$$\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)^2 (1+y'^2) = R^2 \Rightarrow$$

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

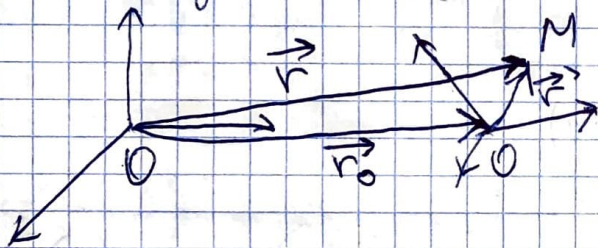
§3. Относительность механического движения

Это различие движений одного и того же тела по отношению к разным телам отсчёта.

Тело отсчёта — тело, относительно которого мы рассматриваем движение интересующих нас тел.

- Т-име две системы отсчёта: одна из которых неподвижна, а вторая движется поступательно относительно первой системы.

Поступательным назовём движение, при котором ориентация осей координат остаётся неизменной.



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \quad \frac{d}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' \quad \frac{d}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$$

$\vec{v}_{abc} = \vec{v}_{am} + \vec{v}_{c.o}$
$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{am} + \vec{a}_{c.o}$

§4. Принцип относительности Галилея и преобразование Лоренца

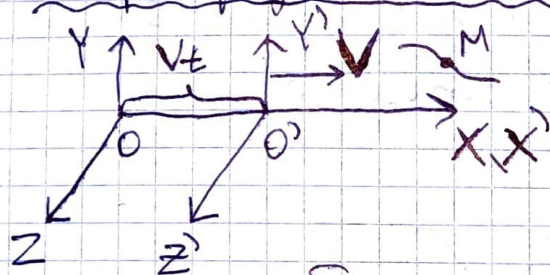
Принцип относительности Галилея:

Какими бы механическими опытами, проведёнными внутри данной с.о. нельзя установить, находится ли эта система в состоянии

покая или равномерно прямолинейно движется.

Математическая формулировка принципа Галилея:
уравнения, выражающие физические законы должны быть инвариантны относительно преобразований, описывающих переход от неподвижной с.о. к системе, движущейся прямолинейно и равномерно.

1. Преобразования Галилея



$$\begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

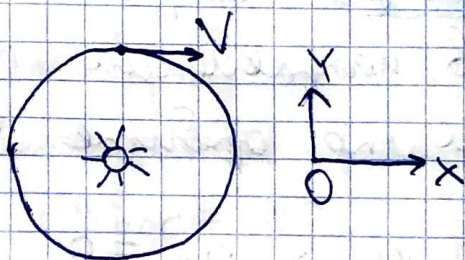
Правила сложения скоростей Галилея:

$$v_x = v_x' + V, \quad v_y = v_y', \quad v_z = v_z'$$

$$\vec{v}_{abc} = \vec{v}_{am} + \vec{v}_{co}$$

• Оказалось, что уравнения ~~максвелла~~ электромагнитного поля неинвариантны относительно преобразований Галилея. Чтобы разрешить это противоречие, было решено проверить правила сложения скоростей Галилея для электромагнитных волн (световых волн). Физик Майкельсон предложил использовать в качестве неподвижной системы отсчёта земной шар, при его движении вокруг Солнца.

Солнце - неподвижная с.о.

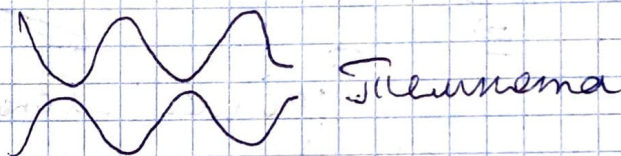
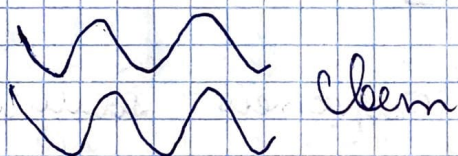


Гипотеза неподвижного эфира:

$$v_x^2 + v_y^2 = c^2, \quad v_x = v_x' + V, \quad v_y = v_y' \quad (*)$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad V = 3 \cdot 10^4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Майкельсон решил использовать тонкое физическое явление, которое наз-ся интерференция света. Интерференция света — взаимная компенсация действия световых волн в некоторых точках пространства. (свет + свет = темнота)



$T = \frac{\lambda}{c}$ — период световых колебаний

$$\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\Rightarrow T \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ с}$$

Длиновая скорость света — скорость света, относительно Земли в направлении движения Земли по орбите вокруг Солнца.

Обозн: v_0

$$v_0 = |v_x'|, \quad \text{когда } v_y' = 0$$

$$v_0 = c \pm V \quad (\text{из формулы } (*))$$

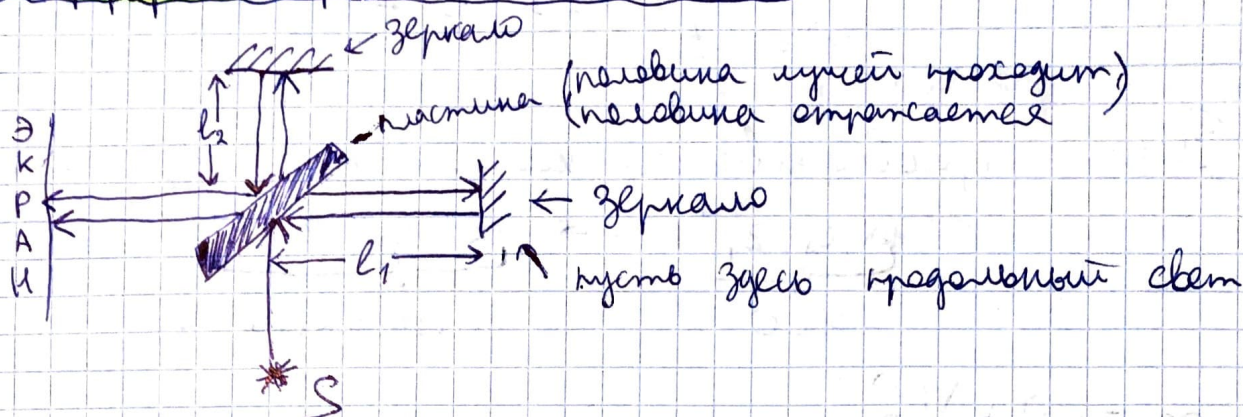
Поперечная скорость света — скорость света, относительно Земли в направлении перпендикулярном направлению движения Земли по орбите вокруг Солнца.

$$v_{\perp} = |v_y'|, \quad \text{когда } v_x' = 0$$

$$v_{\perp} = \sqrt{c^2 - v^2} \quad (\text{из формулы } (*))$$

m.e. $v_1 \neq v_2$

Интерферометр Майкельсона



Размер интерферометра Майкельсона:

$$\frac{l_2}{c+v} + \frac{l_1}{c-v} = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2-v^2}} - \text{"свет"}$$

Поворот прибора на 90° :

$$\frac{l_2}{c+v} + \frac{l_2}{c-v} = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{I}{2} - \text{"темнота"} \quad (T = \frac{\lambda}{c})$$

$$l_1 \approx l_2 \approx \frac{\lambda}{4} \cdot \left(\frac{c}{v}\right)^2 \approx 10 \text{ м}$$

Итак, в результате опыта Майкельсона было выяснено, что ни при каких поворотах прибора интерференционная картина на экране не менялась.

Результат опыта Майкельсона: гипотеза неподвижного эфирного эфира ошибочна. +

Принцип постоянства скорости света:

Скорость света не зависит от того, по отношению к какой с.о., покоящейся или движущейся, она определяется

$$v_{\text{адс}} = v_{\text{отк}} = c \quad (!)$$

• Относительность времени:

$$\begin{aligned} x &= ct \\ x' &= ct' \end{aligned} \Rightarrow t \neq t' (!)$$

Поиск преобразования координат и времени:

$$\underbrace{x, y, z, t}_{\text{ИСО}} \rightarrow \underbrace{x', y', z', t'}_{\text{Подвижная СО}}$$

$$x = x' + Vt'$$

Предположим, что $t = t' + \frac{x'V}{c^2}$

$$x = ct, \quad x' = ct'$$

Обратное преобразование:

$$x' = x - Vt$$

$$t' = t - \frac{xV}{c^2}$$

$$x = ct, \quad x' = ct'$$

• Преобразование Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{x'V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$y = y', \quad z = z'$$

Обратные преобразование:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$y' = y, \quad z' = z$$

• Принцип относительности Эйнштейна:

Уравнения, выражающие физические законы должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца.

§ 5. Кинематика твёрдого тела.

Твёрдое тело мы называем системой материальных точек, расстояние между любыми из которых всегда остаётся неизменным. Иными словами, это тело, которое сохраняет свою форму и размер в процессе движения.

1. Поступательное движение тела — это движение, при котором ориентация тела в пространстве остаётся неизменной.

$$\vec{v}_i = \vec{v}$$

↑
материальная точка тела

$$\vec{a}_i = \vec{a}$$

2. Вращение тела вокруг неподвижной оси —

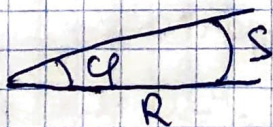
это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, а центры всех окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Ось вращения тела — это прямая линия, на которой лежат неподвижные точки тела.

• Закон движения тела:

$$\varphi = \varphi(t)$$

Измерение угла в радианах:



$$\varphi = \frac{S}{R} \text{ [rad]} \text{ — определение}$$

$$S = R\varphi$$

Угловая скорость вращения тела - производная угла поворота тела по времени.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad [\text{рад/с}]$$

Скорость движения произвольной точки тела:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dS}{dt} = \frac{r_{\perp} d\varphi}{dt} = \omega r_{\perp}$$

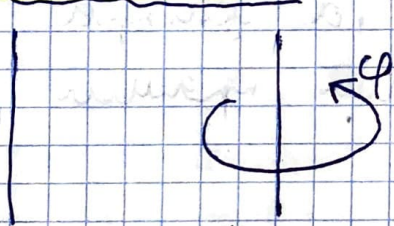
$\uparrow$
расст. от ос. вращ.

$v = \omega r_{\perp}$, $r_{\perp}$ - расст. от данной точки до ос. вращения

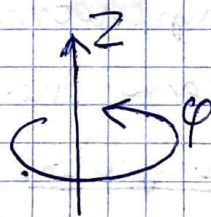
Вектор угловой скорости: - вектор, направленный вдоль ос. вращения тела по правилу правого винта и равный по модулю производной угла поворота тела по времени.



Проекция вектора угловой скорости на ось вращения тела:



$\uparrow$
выберем произв. направление скорости угла



$\uparrow$
сделаем направление ос. правилом правого винта

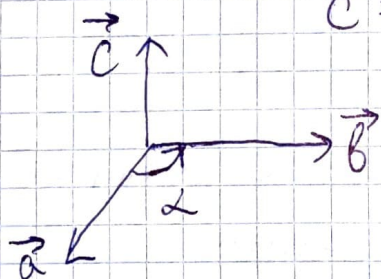
$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi}$$

Вектор скорости произв. точки тела:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

• Векторное произведение векторов — это вектор, перпендикулярный обоим векторам сомножителям, направленный по правилу правого винта и равный по модулю произведению модулей векторов на синус угла между ними.

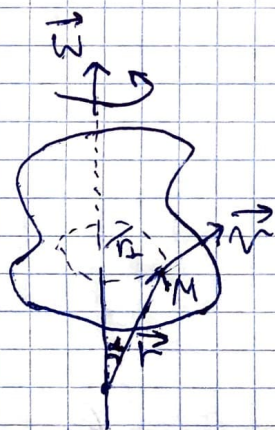
$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$$



$$c = ab \sin \alpha$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{i} (a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j} (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k} (a_x b_y - a_y b_x)$$



$$\vec{v} = [\vec{w}, \vec{r}]$$

$$v = \omega r \sin \alpha = \omega r_{\perp}$$

3. Движение тела с одной неподвижной точкой

Т. Эйлера Движение тела с одной неподвижной точкой в любой момент времени можно рассматривать, как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через точку закрепления.

$$\vec{v} = [\vec{w}, \vec{r}]$$

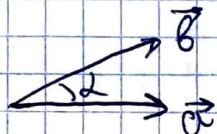
$$\vec{w} = \vec{w}(t)$$

Мгновенная ось вращения тела - это прямая линия, на которой лежат неподвижные в данный момент точки тела.

§6. Матрица поворота тела -

матрица, которая нужна для описания ориентации тела в пространстве

Скалярное произв. векторов - произведение модулей векторов на косинус угла между ними



$$(\vec{a}, \vec{b}) \equiv \vec{a} \vec{b} = ab \cos \alpha$$

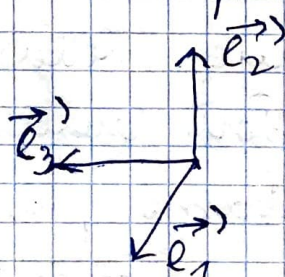
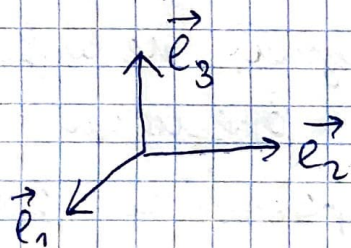
$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Матрица поворота тела - матрица, составленная из скалярных произведений ортов двух координатных систем.

$$S_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j' \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3$$

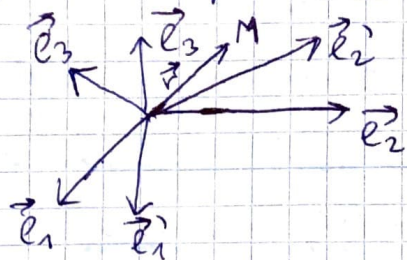
$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \vec{e}_1' & \vec{e}_1 \vec{e}_2' & \vec{e}_1 \vec{e}_3' \\ \vec{e}_2 \vec{e}_1' & \vec{e}_2 \vec{e}_2' & \vec{e}_2 \vec{e}_3' \\ \vec{e}_3 \vec{e}_1' & \vec{e}_3 \vec{e}_2' & \vec{e}_3 \vec{e}_3' \end{pmatrix}$$

Пример: поворот ^{декартовой} системы координат вокруг орта $\vec{e}_1$ на 30° по правилу правого винта



$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Преобразование декартовых компонент вектора при повороте системы координат



$$\vec{r} = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3$$

$$\vec{r} = \vec{e}_1' x_1' + \vec{e}_2' x_2' + \vec{e}_3' x_3' \quad || (*)$$

Умножим правую и левую часть ~~рав-ва~~ ~~рав-ва~~ (*) на $\vec{e}_1$. Получим:

$$x_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_1') x_1' + (\vec{e}_1, \vec{e}_2') x_2' + (\vec{e}_1, \vec{e}_3') x_3' = S_{11} x_1' + S_{12} x_2' + S_{13} x_3' \quad - // - \text{ где } x_2 \text{ и } x_3$$

$$x_1 = \sum_{i=1}^3 S_{1i} x_i' ; x_2 = \sum_{i=1}^3 S_{2i} x_i' ; x_3 = \sum_{i=1}^3 S_{3i} x_i'$$

$$x_i = \sum_{j=1}^3 S_{ij} x_j'$$

Второй поворот системы координат

$$x_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j' \quad - \text{ первый поворот}$$

$$x_j' = \sum_{k=1}^3 b_{jk} x_k'' \quad - \text{ второй поворот}$$

$$x_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \sum_{k=1}^3 b_{jk} x_k'' = \sum_{k=1}^3 x_k'' \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{jk}$$

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{jk}$$

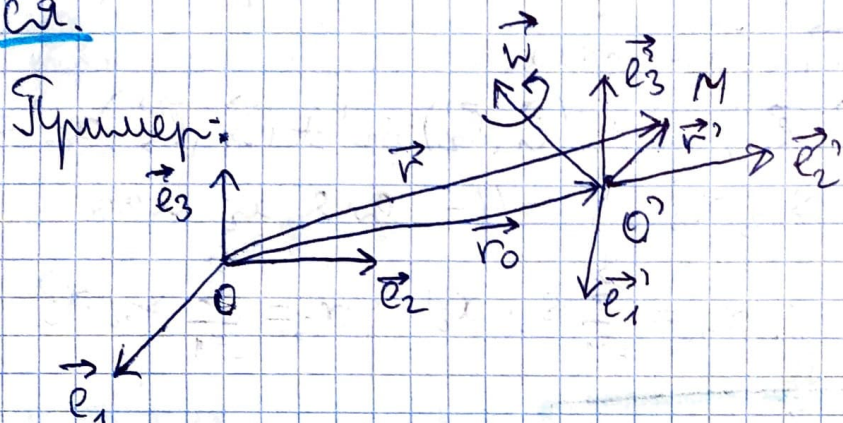
$$x_i = \sum_{k=1}^3 C_{ik} x_k'' , \quad \hat{C} = \hat{A} \hat{B}, \quad \hat{A} \text{ и } \hat{B} - \text{ матрицы поворота}$$

Значит $\hat{A} \hat{B} \neq \hat{B} \hat{A}$ (в общем случае)

§7. Кинематика вращающейся системы отсчёта

Какие особенности приобретает физ. явление, если мы р-ть относительно вращающейся с.о.?

Попробуем установить кинематические связи между хар-ками движения материальной точки в двух с.о.: неподвижной и вращающейся с.о.



- Связь радиус-векторов точки: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$ (*)
- Связь векторов перемещения точки:

Возьмём дифференциал от правой и левой части (*): $d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}'$

$$\vec{r}' = \vec{e}_1' x_1 + \vec{e}_2' x_2 + \vec{e}_3' x_3 \quad \text{— все 6 величин могут изменяться}$$

$$d\vec{r}' = \vec{e}_1' dx_1 + \vec{e}_2' dx_2 + \vec{e}_3' dx_3 + x_1 d\vec{e}_1' + x_2 d\vec{e}_2' + x_3 d\vec{e}_3'$$

$d\vec{r}' = \vec{e}_1' dx_1 + \vec{e}_2' dx_2 + \vec{e}_3' dx_3$ — вектор перемещения материальной точки M относительно вращающейся с.о.

$$\vec{\omega} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}] dt$$

$$d\vec{e}_1' = [\vec{\omega}, \vec{e}_1'] dt, \quad d\vec{e}_2' = [\vec{\omega}, \vec{e}_2'] dt$$

$$d\vec{e}_3' = [\vec{\omega}, \vec{e}_3'] dt$$

$$d\vec{r}' = \vec{e}_1' dx_1' + \vec{e}_2' dx_2' + \vec{e}_3' dx_3' +$$

$$+ x_1' [\vec{\omega}, \vec{e}_1'] dt + x_2' [\vec{\omega}, \vec{e}_2'] dt + x_3' [\vec{\omega}, \vec{e}_3'] dt =$$

$$= d'\vec{r}' + dt([\vec{\omega}, x_1' \vec{e}_1'] + [\vec{\omega}, x_2' \vec{e}_2'] + [\vec{\omega}, x_3' \vec{e}_3']) =$$

$$= \{ \vec{r}' = \vec{e}_1' x_1' + \vec{e}_2' x_2' + \vec{e}_3' x_3' \} = d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}'] dt$$

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}'] dt \quad (**)$$

• Число скоростей точек: $(**) \div dt$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}'] \quad (***)$$

• Число угловых скоростей: рассмотрим угловую скорость и ее вектор (***):

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, d'\vec{r}']$$

$$\vec{\omega} = \text{const}$$

$$\vec{r}' = \vec{e}_1' x_1' + \vec{e}_2' x_2' + \vec{e}_3' x_3' - \text{все 6 берем из системы координат}$$

$$d\vec{r}' = d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}'] dt$$

где $d'\vec{r}' = \vec{e}_1' dx_1' + \vec{e}_2' dx_2' + \vec{e}_3' dx_3'$

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}'] dt + [\vec{\omega}, d'\vec{r}'] dt$$

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}'] dt + [\vec{\omega}, d'\vec{r}'] dt + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']] dt \quad | : dt$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + [\vec{\omega}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}, \vec{v}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']]$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']]$$

(1)

Переносное и кориолисово ускорение мат. точки:

$$\text{thz (1): } \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_n + \vec{a}_k, \text{ где}$$

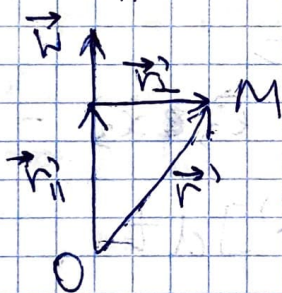
$$\vec{a}_n = \vec{a}_0 + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']]$$

$$\vec{a}_k = 2 [\vec{\omega}, \vec{v}']$$

Центростремительное ускорение мат. точки:

Радиус-вектор точки во вращающейся с.о. ($\vec{r}'$) разложим на две составляющие: составляющую, параллельную оси вращения системы и составляющую, перпендикулярную оси вращения в с.о.

$$\vec{r}' = \vec{r}'_{||} + \vec{r}'_{\perp}$$



$$[\vec{\omega}, \vec{r}'] = [\vec{\omega}, \vec{r}'_{||} + \vec{r}'_{\perp}] = [\vec{\omega}, \vec{r}'_{||}] + [\vec{\omega}, \vec{r}'_{\perp}] = [\vec{\omega}, \vec{r}'_{\perp}]$$

$\vec{0}$ (векторы коллинеарны)

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$$

$$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']] = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}'_{\perp}]] = \vec{\omega}(\underbrace{\vec{\omega}, \vec{r}'_{\perp}}_{\vec{0}}) - \vec{r}'_{\perp}(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = -\vec{r}'_{\perp} \omega^2$$

$$\vec{a}_{gc} = -\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + \vec{a}_{gc} + \vec{a}_k$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] - \omega^2 \vec{r}'_{\perp}$$

§ 8. Законы Ньютона

I закон Ньютона - всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не заставят его изменить это состояние.

II закон Ньютона - произведение массы материальной точки на ускорение равно действующей на неё силе. $m\vec{a} = \vec{F}$

III закон Ньютона - действия двух тел друг на друга равны и противоположно направлены. $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

~~Масса~~ Масса - это мера отклика тела на действие силы.

~~Сила~~ - мера ~~действия тела~~ отклика тела на действие других тел.

Сила - мера действия на данное тело других тел.

Единица измерения массы - 1 килограмм [кг]

1 килограмм - масса эталонного тела, представляющего собой цилиндр из сплава платины и иридия диаметром 39 мм и такой же высоты

Единица измерения силы - 1 Ньютон [Н]

1 ньютон - сила, вызывающая у тела массой 1 кг ускорение $1 \frac{м}{с^2}$

$$\boxed{1 \text{ н}} \rightarrow 1 \frac{м}{с^2}$$

$$H = m \cdot \frac{u}{c^2}, \quad a = \frac{2S}{t^2}$$

Измерение массы:

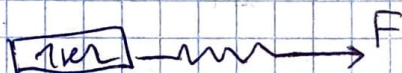
Чтобы измерить массу произвольного тела ~~под действием~~ подействуем на это тело силой 1 Н и измерим ускорение этого тела



$$m = \frac{1\text{ Н}}{a_1}$$

Измерение силы:

Чтобы измерить силу подействуем ею на тело массой 1 кг и измерим ускорение.



$$F = 1\text{ кг} \cdot a_2$$

Опытная проверка II з. Ньютона: $a = \frac{F}{m}$

Область применимости законов Ньютона:

Законы Ньютона нельзя применять, если:

- движение тел с очень большими скоростями, близкими к скорости света;
- движение ^{очень} маленьких тел в очень малых областях пространства (движение электрона в атоме). (неприменим закон движения)

Сложение сил

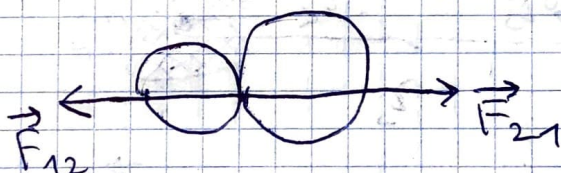
Если на мат.-точку одновременно действуют две силы, то она начинает двигаться так, как если бы действовала одна сила, равная векторной сумме первых двух сил.



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \sum_i \vec{F}_i$$

Силы складываются по правилу сложения векторов.

Силы взаимодействия тел: они приложены к разным телам, направлены вдоль одной прямой и имеют одинаковую природу.



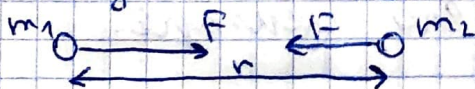
§9. Силы в механике

Гравитационные силы:

1) Закон всемирного тяготения — любые две материальные точки притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

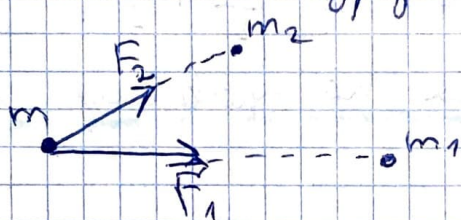
G — гравитационная постоянная; $G = 6,6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$



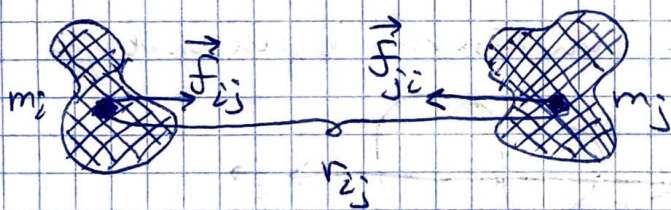
• Опыт Кавендиша с крутильными весами:



II) Принцип суперпозиции — каждая пара частиц взаимодействует независимо, т.е. так, как если бы других частиц не было.



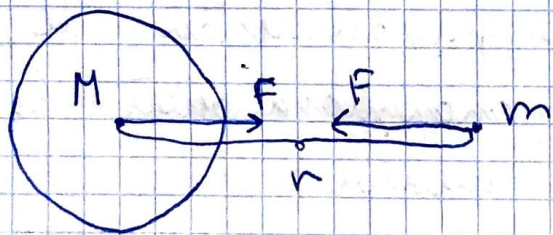
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$



$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

$$\vec{F} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}$$

• Притяжение точки к шару



$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

Расчёт показывает, что шар притягивает мат. точку так, как если бы вся масса шара находилась в его центре.

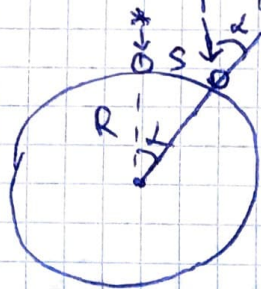
• "Взвешивание" Земли

$$F = mg = G \frac{Mm}{R^2} \quad (\text{поверхности шар и окружности})$$

$$M = \frac{gR^2}{G}, \quad R = 6400 \text{ км}$$

$$\Rightarrow M = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

• Измерение радиуса Земли



$$\alpha = \frac{S}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{S}{\alpha}}$$

• Законы, подтверждающие закон всемирного тяготения

1) Одинаковое ускорение свободного падения всех тел вблизи поверхности Земли.

$$mg = G \frac{mM}{R^2}$$

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

2) Период обращения Луны

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$mg = G \frac{mM}{R^2}$$

$$T = 2\pi \frac{r \sqrt{r}}{R \sqrt{g}}$$

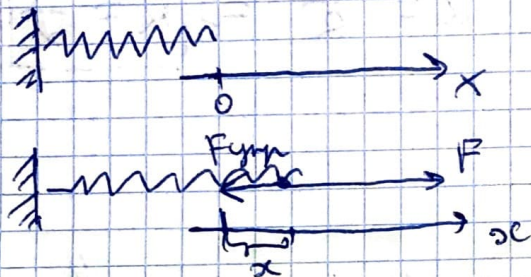
$$r = 384000 \text{ км} = 3,84 \cdot 10^8 \text{ м}$$

$$T = 3 \cdot 10^6 \text{ с} = 30 \text{ суток}$$

Силы упругости

• Сила упругости - сила, препятствующая деформации упругого тела.

• Упругий, назовём тело, которое восстанавливает свою форму после прекращения действия силы.



• Закон Гюка - сила упругости пропорциональна величине деформации.

$$F_x = -kx$$

k - коэффициент упругости - коэф. пропорциональности между силой упругости и величиной деформации

• Закон Гюка представляет собой приближённое соотношение, которое верно при неслишком больших деформациях.

~~Закон Гюка~~

• Модуль Юнга - хар-ка упругих св-в материала.

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad [1] \quad \text{относительная деформация}$$

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right] \quad \text{механическое напряжение}$$

S - площадь поперечного сечения проволоки

$$\sigma = E \epsilon$$

E — модуль Юнга

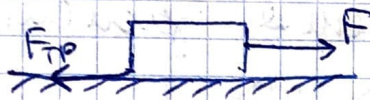
$$[E] = \frac{H}{m^2} \equiv Pa$$

Для стали: $E = 2 \cdot 10^{11} Pa$

Силы трения

• Сила трения — сила, препятствующая относительному перемещению соприкасающихся тел.

• Трение покоя — трение в ~~отсут~~ отсутствие относительного перемещения соприкасающихся тел.



$$\vec{F} + \vec{F}_{тр} = 0$$

$$\vec{F}_{тр} = -\vec{F}$$

Опыт показывает, что сила трения покоя ограничена сверху некоторой величиной.

$$F_{тр} \leq F_{max}$$

• Сила нормального давления — составляющая силы взаимодействия двух тел, перпендикулярная поверхности соприкосновения.

Обозначим: N

Опыт показывает, что максимальная сила трения покоя пропорциональна силе норм. давления.

$$F_{max} = \mu N$$

μ — коэффициент трения



• Трение скольжения - трение при наличии отн. перемещения соприкасающихся тел.

Опыт показывает, что сила трения скольжения приблизительно равна максимальной силе трения покоя.

$$F_{\text{тр}} = \mu N$$

• Вязкое трение - трение, препятствующее движению тела в сплошной среде

Особенности вязкого трения:

1) Для вязкого трения отсутствует трение покоя

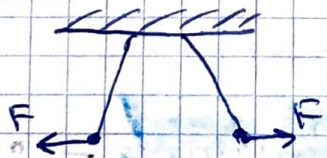
2) Сила вязкого трения зависит от скорости.

$$F_{\text{тр}} \sim v$$

если скорость дв. тела дост. мала

Электромагнитные силы

• Электрическое взаимодействие



шарики из эбонита, натёртые шерстью отталкиваются друг от друга

• Электрический заряд - мера электрического взаимодействия тел.

Обозначим: q .

• Электрическое поле - поле, создаваемое электрическими зарядами и действующее на эл. заряды.

- Напряжённость эл. поля - мера действия эл. поля на заряд.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$\vec{F}$ - сила, действ. со стороны поля на заряд

- Электрическая сила: $\vec{F} = q\vec{E}$

- Магнитное взаимодействие - взаимодействие проводников с токами.

- Магнитная сила

$$\vec{F} = q [\vec{v}, \vec{B}]$$

$\vec{B}$ - вектор магнитной индукции

$\vec{F}$ - сила, действующая со стороны магн. поля на движущуюся заряженную частицу.

- Сила Лоренца

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$

§10. Релятивистское уравнение движения - ур-ние, обобщающее II закон Ньютона на случай движения тела с большой скоростью. (порядка скорости света)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

- Релятивистский импульс

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

3) Уточнение понятия массы: опыт по измерению массы можно проводить при скорости тела значительно меньшей скорости света.

§11. Инерциальные системы отсчёта. Сила инерции.

Инерциальная СО - СО, относительно которой всякое тело бесконечно удалённое от других тел не испытывает ускорения.

Все остальные СО - неинерциальные

Уравнение движения мат. точки относительно инерц. СО:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m\vec{a} + m\vec{a}' - m\vec{a}' = \vec{F}$$

$\vec{a}'$ - уск. мат. точки отн. инерц. СО

$$m\vec{a} = \vec{F} - m(\vec{a} - \vec{a}')$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}$$

Сила инерции - гравитационная сила, действующая на мат. точку в инерц. СО и определяемая формулой $\vec{F}_{\text{ин}} = -m(\vec{a} - \vec{a}')$, m - масса точки, $\vec{a}$ - уск. точки отн. какой-либо ИСО, $\vec{a}'$ - уск. точки отн. данной ИСО

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}_1 + 2[\vec{\omega}, \vec{v}']$$

$$\vec{a} - \vec{a}' = \vec{a}_0 + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] - \omega^2 \vec{r}_1$$

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0 + m\omega^2 \vec{r}_1 - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}']$$

переносная
сила
инерции

центростремительная
сила инерции

корриолисова
сила инерции

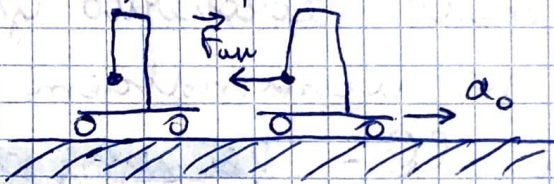
$$\vec{F}_{\text{ин}} = \vec{F}_n + \vec{F}_{\text{цс}} + \vec{F}_k$$

$\vec{F}_n = -m\vec{a}_0$ - переносная сила инерции

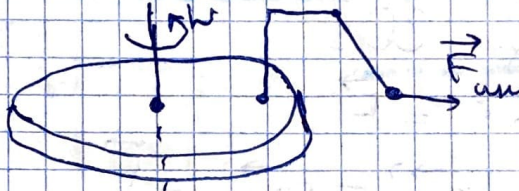
$\vec{F}_{\text{цс}} = m\omega^2 \vec{r}'$ - центробежная сила инерции

$\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}']$ - корюшкова сила инерции

Примеры: 1) Переносная сила инерции:



2) Центробежная сила инерции:



3) Корюшкова сила инерции:
Маятник Фуко

Св-ва сил инерции:

- 1) Эти силы отличны от нуля только для наблюдателя, связанного с ИСО.
- 2) Нельзя указать тело, со стороны которого приложена сила инерции.

• Невесомость - исчезновение веса тела, вызванное ускорением СО.

• Перегрузка - возрастание веса тела, вызванное ускорением СО.

• Центрифуга - устройство, создающее искусственно центробежную силу инерции.

§12. Импульс частицы и системы частиц. Движение центра масс.

• Импульс материальной точки - произведение массы точки на её скорость.

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad [\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}]$$

• Закон изменения импульса точки:

Для этой величины произв импульса по времени:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \equiv \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

• Импульс системы частиц - сумма импульсов отдельных частиц системы.

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

• Центр масс системы частиц - точка, радиус-вектор которой определяется формулой

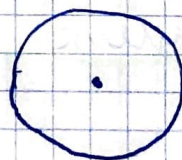
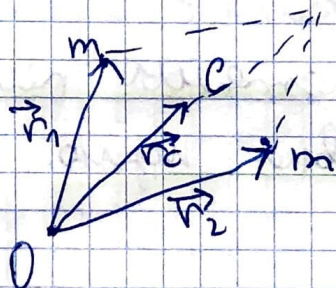
$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

m - полная масса системы

$$m = \sum_i m_i$$

Пример:

$$\vec{r}_c = \frac{m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{2m} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$



- **Скорость центра масс** - производная радиус-вектора центра масс по времени

$$\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c$$

- **Ускорение центра масс** - производная скорости центра масс по времени.

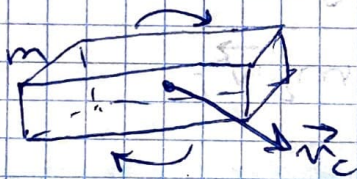
$$\vec{a}_c = \dot{\vec{v}}_c$$

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{a}_i$$

- **Импульс механической системы:**

$$\vec{p} = m \vec{v}_c$$



- **Внутренние силы** - силы взаимодействия между телами данной системы.

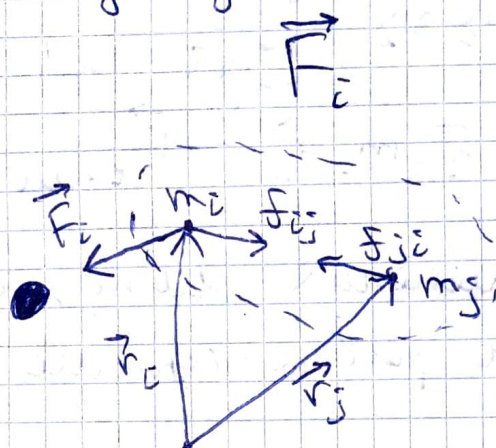
$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

$$\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = 0$$

$$\sum_{i,j} \vec{f}_{ij} = 0 \Rightarrow$$

для любой мех. системы полная сумма внутренних сил равна нулю.

• **Внешние силы** - силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в данную систему.



• **Закон движения центра масс системы:**

$$m_c \vec{a}_c = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}$$

Проецируем равенство на все точки системы

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i + \underbrace{\sum_{ij} \vec{F}_{ij}}_{=0}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

$$m_c \vec{a}_c = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\Downarrow$$

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

$$\vec{F}_{\text{внеш}} = \sum_i \vec{F}_i$$

Закон: центр масс системы движется так, как если бы в этой точке находилась вся масса системы и к ней были бы приложены все внешние силы.

§13. Закон сохранения импульса.

- Закон изменения импульса механ. сис-мы:

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad \left\{ \sum_i m_i \vec{a}_i = m \vec{a}_c \right\}$$

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_i m_i \vec{a}_i \stackrel{\checkmark}{=} \vec{F}_{\text{внеш}}$$

Закон: скорость изменения импульса механической системы равна сумме внешних сил.

- Закон сохр. импульса:** если сумма внешних сил равна нулю, то импульс механической системы сохраняется

$$\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$$

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

- Закон сохранения импульса относительно осей:** если $\exists$ такая ось, в проекции на которую сумма внешних сил равна нулю, то в направлении этой оси импульс системы сохраняется

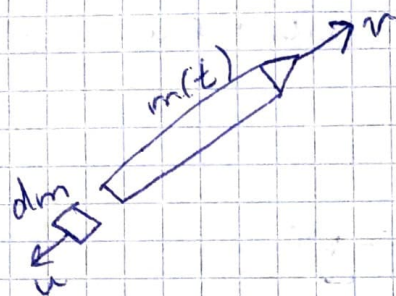
$$F_{\text{внеш}}^{(x)} = 0$$

$$p_x = \sum_i m_i v_{ix} = \text{const}$$

(Следует из закона изменения импульса сис-мы)

§ 14. Реактивное движение - движение ракеты или самолёта, обусловленное выбросом реактивной струи.

• Реактивная сила:



$$m\vec{v} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{u} dm$$

$$m d\vec{v} - dm d\vec{v} + \vec{u} dm = 0$$

$$\vec{u} = \vec{c} + \vec{v}$$

отн. скорости

Если пренебрежем временем t мал, то $dm \cdot d\vec{v}$ - величина второго порядка малости $\Rightarrow$
 $m d\vec{v} = -\vec{c} dm \quad | : dt$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu \vec{c}$$

μ - скорость расхода массы ; $\mu = \frac{dm}{dt}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\vec{F}_p = -\mu \vec{c}$$

Пример: ракета "Энергия"

$$\mu = 10 \text{ тонн/с}$$

$$c = 3 \text{ км/с}$$

$$F_p = \mu c = 3 \cdot 10^7 \text{ Н}$$

• Сгоревшая масса ракеты:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nu \vec{C}$$

$$m = m(t) = m_0 - \nu t$$

сгоревшая масса

сгоревшая масса: на вып. функции ракеты:

$$m \frac{dm}{dt} = \nu c$$

$$(m_0 - \nu t) \frac{dv}{dt} = \nu c$$

$$\frac{dv}{c} = \frac{\nu dt}{m_0 - \nu t}$$

$$\int_0^v \frac{dv}{c} = \int_0^t \frac{\nu dt}{m_0 - \nu t} = - \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = - \ln \frac{m}{m_0}$$

$$\int_0^v \frac{dv}{c} = \ln \frac{m_0}{m} = \frac{v}{c}$$

~~сгоревшая масса~~

$$m_0 = m e^{v/c}$$

Пример: ракета "Энергия"

$$m = 100 \text{ ТОНН}$$

$$\nu = 8 \text{ км/с}$$

$$c = 2,7 \text{ км/с}$$

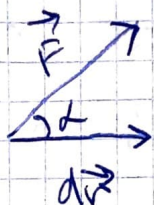
$$m_0 \approx 2000 \text{ ТОНН}$$

§15. Работа и потенциальная энергия.

Элементарная работа - это скалярное произведение силы на бесконечно малое перемещение точки приложения силы

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos \alpha$$

↑
скал. пр-ие



$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

распишем скал
кр-ые.

Работа - сумма элементарных работ.

$$A = \int dA = \int \vec{F} d\vec{r}$$

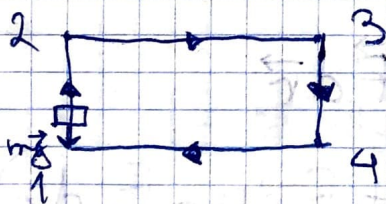
$$[A] = \text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м}$$

Джоуль - работа, которую совершает сила в 1 Н при перемещении точки приложения силы на 1 м в направлении действия силы

Потенциальная сила - сила, работа кото-
рой равна 0 при перемещении точки
приложения силы по любой замкнуто-
му контуру.

$$\oint dA = 0$$

Пример:



$$\oint dA = \oint m \vec{g} d\vec{r} = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = 0$$

$\Rightarrow$ сила тяжести явл-ся потенциальной силой,
а также и гравит. сила, образующая однород-
ное силовое поле, где сила не зависит от
координат точки явл-ся потенциальной силой.

Сила трения - непотенциальная сила
Сила упругости и сила взаим. эл. зарядов -
потенциальные силы.

Элементарная потенциальная энергия -
элементарная работа потенциальной силы,
взятая со знаком $^{-}$ минус

$$d\Pi = -dA_n \quad \text{--- потенциальная сила}$$

Потенциальная энергия - сумма элемент.
потенциальных энергий.

$$\Pi = \int d\Pi$$

$$[\Pi] = \text{Дж}$$

$$\Pi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r}$$

Выражение силы через потенциальную энергию:

$$\Pi = \Pi(x, y, z)$$

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz$$

$$d\Pi = -dA_n = -\vec{F} d\vec{r}$$

$$d\Pi = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$\Downarrow$$
$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} ; F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} ; F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

Градиент: $\text{grad } \Pi = \vec{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z}$

$$\vec{F} = -\text{grad } \Pi$$

Потенциальная энергия системы равна сумме потенциальной энергии отдельных частей системы.

$$\Pi = \sum_i \Pi_i$$

§16. Потенциальная энергия механических систем.

• Потенциальная энергия тел точки в однородном поле тяжести:



$$d\Pi = -dA = -\vec{F} d\vec{r} = -mg dz = mg dz$$

$$\Pi = \int d\Pi = \int_0^z mg dz = mgz$$

$$\Pi = mgz$$

• Пот. энергия тела в однородном поле тяжести:

$$\Pi = \sum_i \Pi_i$$

$$\Pi_i = m_i g z_i$$

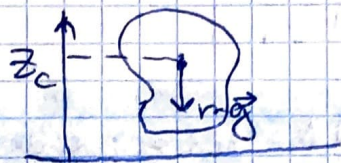
$$\Pi = g \sum_i m_i z_i = mg z_c$$

масса
всей
системы

высота
центра
масс

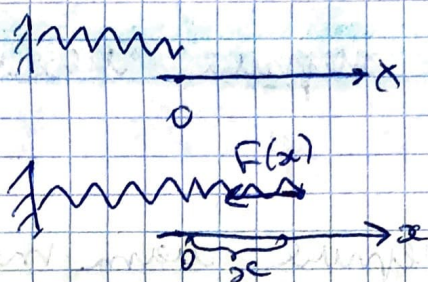
⇒ Пот. энергия тела в поле тяжести та-

кова, как если бы вся масса тела находилась в его центре масс.



• Потенциальная энергия пружины:

$$F_{xc} = -kx$$



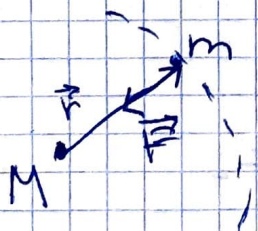
$$d\Pi = -dA = -\vec{F} d\vec{r} = -F_{xc} dx = kx dx$$

$$\Pi = \int d\Pi = k \int_0^x x dx = \frac{kx^2}{2}$$

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}$$

• Пот. энергия мат. точки в центральном силовом поле:

Центральное сил. поле — поле силы, направленной всегда в сторону одной и той же точки, называемой силовым центром.



$$\vec{\Pi} = -\frac{\vec{r}}{r} F$$

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$d\Pi = -\vec{F} d\vec{r} = \frac{F}{r} \vec{r} d\vec{r}$$

$$\vec{r} d\vec{r} = x dx + y dy + z dz$$

$$\vec{r} d\vec{r} = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr$$

Для любого вектора скал. пр-ие этого вектора на его направление равно модулю этого вектора, умноженному на направление модуля

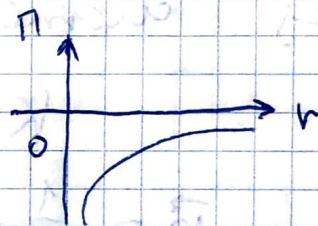
$$d\Pi = F dr = G \frac{Mm}{r^2} dr$$

$$\Pi = \int d\Pi = G M m \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -G M m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

т.е. пот. энергия
мат. точки спр. 0
наб. на r_0

$$r_0 = \infty$$

$$\Pi = -G \frac{Mm}{r}$$



§ 17. Кинетическая энергия частицы и системы частиц.

• Кин. энергия мат. точки - это величина, определяемая формулой

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

$$[K] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$$

Теорема об изменении кин. энергии:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

умножим правую и левую части векторного рав-ва скалярно на вектор бесконечно мало перемещения точки

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = F d\vec{r} = dA = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \vec{v} d\vec{v}$$

из пред. выражения $\vec{v} d\vec{v} = v dv$

$$m \vec{v} d\vec{v} = \cancel{m v} dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dK$$

$$dK = dA$$

Формулировка: приращение кин. энергии мат. точки равно элементарной работе, действующей на нее силы.

• Кинетическая энергия системы частиц — сумма кинетических энергий отдельных частиц системы.

$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic} \quad \text{отн. центра масс.}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_{ic} \cdot \vec{v}_c + \vec{v}_{ic})$$

$$K = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ic}^2 + \vec{v}_c \cdot \sum_i m_i \vec{v}_{ic}$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum_i m (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = m \vec{v}_c - m \vec{v}_c = 0$$

$$K = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ic}^2$$

$$K = K_c + K_{oc}$$

$$K_c = \frac{1}{2} m v_c^2 ; K_{oc} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ic}^2$$

§18. Кинетическая энергия твёрдого тела

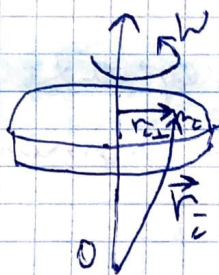
• Кин. ~~энергия~~ энергия тела, совершающего поступательное движение:

$$K = \frac{1}{2} m v_c^2 \quad (K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v_c^2 \sum_i m_i = \frac{1}{2} m v_c^2)$$

(скорости всех точек одинаковы)

⇒ При поступ. движении тела кин. энергия тела такова, как если бы вся масса тела переместилась в его центр масс.

• Кин. энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:



$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

$$v_i = \omega r_{i\perp}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_{i\perp}^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{I \omega^2}{2}$$

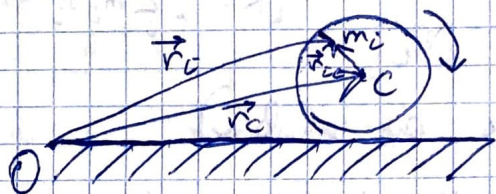
$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

Момент инерции тела отн. данной оси — это величина, определяемая формулой

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

• Кин. энергия тела, совершающего плоское движение:

Плоское движение — движение, при котором все точки тела движутся параллельно в некоторой неподвижной плоскости



движение, отн. вертикальной плоскости

$$K = K_c + K_{oc}$$

$$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

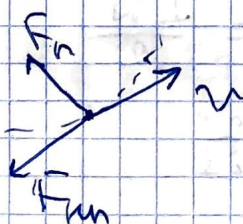
§19. Закон сохранения энергии в механике

Полная механическая энергия системы — сумма кинетической и потенциальной энергии системы.

$$E = K + \Pi$$

• Закон изменения полной энергии:

$$\vec{F} = \underbrace{\vec{F}_n}_{\text{кон. сила}} + \underbrace{\vec{F}_{un}}_{\text{ненот. сила}}$$



из §17 $\Rightarrow dK = dA$

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F}_n d\vec{r} + \vec{F}_{un} d\vec{r} = dA_n + dA_{un}$$

$$dA_n = \vec{F}_n d\vec{r}; dA_{un} = \vec{F}_{un} d\vec{r}$$

Ил.к. $dA_n = -d\Pi$, то

$$dK = -d\Pi + dA_n$$

$$dE = d(K + \Pi) = dA_n$$

Вывод: приращение полной механической энергии системы равно элементарной работе непотенциальной силы.

• Закон сохранения энергии в механике Ньютона

Формулировка: если работа непотенциальных сил равна нулю, то полная механическая энергия системы сохраняется

$$A_n = 0 \Rightarrow E = K + \Pi = \text{const}$$

§20. Импульс и энергия в теории относительности

Релятивистский импульс частицы — это величина, определяемая формулой:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Релятивистская энергия частицы — это вел-на, отн формулой:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Энергия покоя частицы — энергия частицы, скорость которой равна нулю.

$$E_0 = mc^2$$

Релятивистский импульс системы частиц - это сумма релятивистских импульсов отдельных частиц системы

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$$

Релятивистская энергия системы частиц - это сумма рел. эн. отд. частиц системы.

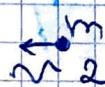
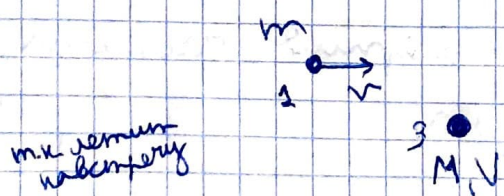
$$E = \sum_i E_i = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$$

Закон сохранения энергии и импульса в теории отн.-ти: если сумма внешних сил равна нулю, то релятивистский импульс и релятив. энергия системы сохраняется

$$\vec{F}_{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{const}, E = \text{const}$$

Закон сохр. энергии в теории отн. является следствием закона сохр. импульса и принципа относительности

Пример: неупругий удар (удар, после которого скорости частиц становятся равными, частицы слипаются)



$$\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{M\vec{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \Rightarrow \vec{V} = 0$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

$$\vec{P}_1 - \vec{P}_2 = \vec{P}_3$$

$$E_1 + E_2 = E_3$$

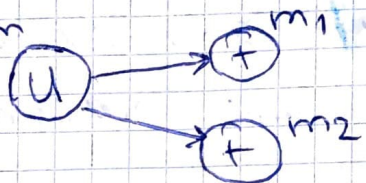
$$\vec{V} = 0$$

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

↓

$$M > 2m$$

энергия, которая
выделяется



$$E = c^2 \Delta m$$

$$\Delta m = m - m_1 - m_2$$

Фотон - это частица света.

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}c &= E\vec{v} \\ E^2 - p^2c^2 &= m^2c^4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{эти формулы экв. с-м} \\ &\vec{p} \text{ и } E, \text{ данные ранее} \end{aligned}$$

Для частного случая, когда $m = 0$.

$$E = pc$$

$$v = c$$

Степеновое выражение: (поскольку свет движется со скоростью c)

$$\vec{p} = F$$

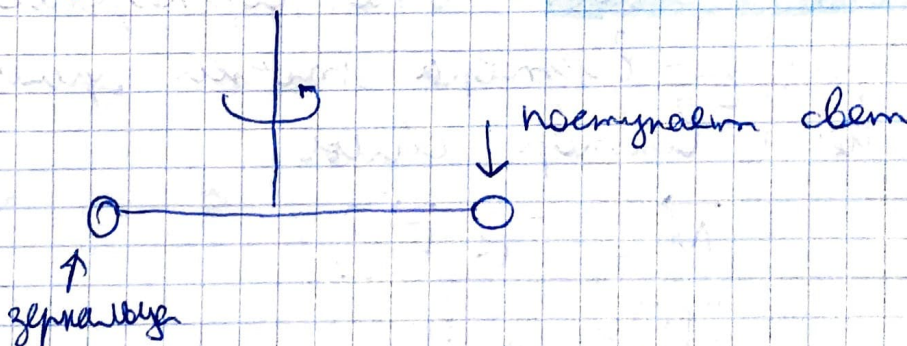
$$p = E/c \quad (\text{импульс фотона})$$

$$F = \dot{E}/c$$

$$F = P/c, \quad P - \text{мощность светового пучка.}$$

$$\text{] } P = 1 \text{ кВт} \Rightarrow F = 3 \cdot 10^6 \text{ Н}$$

Опыт Лабдера

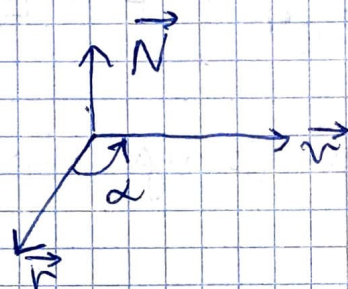


§21. Момент импульса частицы и системы частиц. Момент силы.

Момент импульса частицы - это векторное произведение радиус-вектора частицы на её импульс.

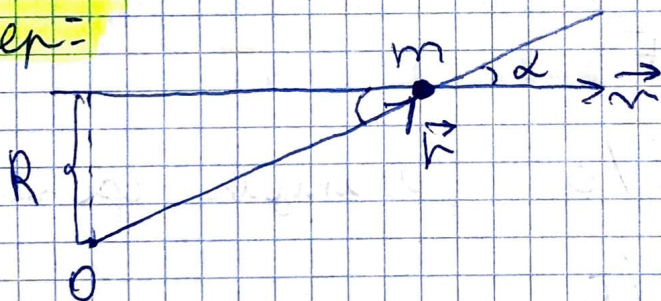
$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

$$[N] = \text{м} \cdot \text{м} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$$



$$N = r m v \sin \alpha$$

Пример:



$$R = r \sin \alpha$$

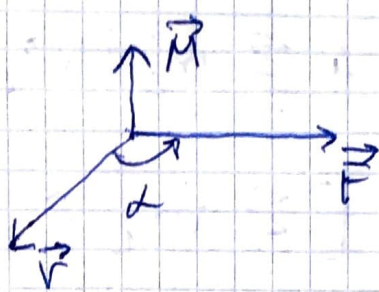
$$N = R m v$$

Модуль момента импульса мат. точки равен произведению импульса точки на расстояние от линии движения точки до начала отсчёта

Момент силы - это векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы

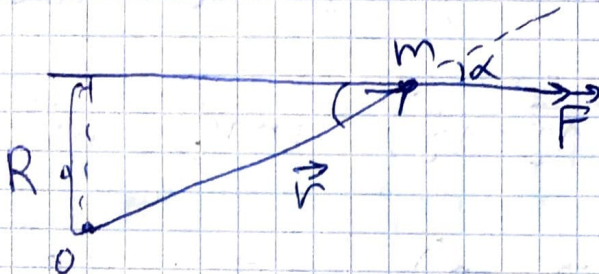
$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$[M] = \text{м} \cdot \text{Н}$$



$$M = rF \sin \alpha$$

Пример:



$$R = r \sin \alpha$$

$$M = RF$$

Момент силы равен произведению силы на расстояние от точки действия силы до начала отрезка. (R - плечо силы).

Момент импульса системы частиц - это сумма моментов импульса отдельных частиц системы.

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{v}_c = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i$$



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}'_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}'_i$$

$$\vec{N} = \sum_i m_i [\vec{r}_c + \vec{r}'_i, \vec{v}_c + \vec{v}'_i]$$

$$\vec{N} = [\vec{r}_c, m \vec{v}_c] + \sum_i m_i [\vec{r}_{ic}, \vec{v}_{ic}] +$$

$$+ [\vec{r}_c, \sum_i m_i \vec{v}_{ic}] + [\sum_i m_i \vec{r}_{ic}, \vec{v}_c]$$

"0" "0"

$$\vec{N} = [\vec{r}_c, m \vec{v}_c] + \sum_i m_i [\vec{r}_{ic}, \vec{v}_{ic}]$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = m \vec{v}_c - m \vec{v}_c = 0$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = m \vec{r}_c - m \vec{r}_c = 0$$

$$\vec{N} = \vec{N}_c + \vec{N}_{oc}$$

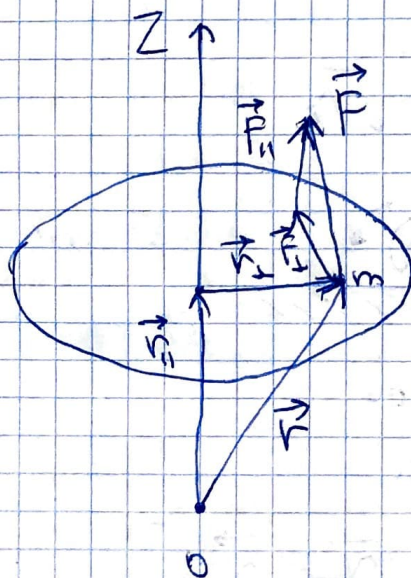
момент
импульса
центра масс

момент импульса
считая от
центра масс

$$\vec{N}_c = [\vec{r}_c, m \vec{v}_c]$$

$$\vec{N}_{oc} = \sum_i m_i [\vec{r}_{ic}, \vec{v}_{ic}]$$

Момент относительно оси - проекция, векторов моментов на эту ось.



$$\vec{F} = \vec{F}_{||} + \vec{F}_{\perp}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}$$

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = [\vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{||} + \vec{F}_{\perp}] =$$

$$= [\vec{r}_{11}, \vec{F}_{11}] + [\vec{r}_{11}, \vec{F}_{12}] + [\vec{r}_{12}, \vec{F}_{11}] + [\vec{r}_{12}, \vec{F}_{12}]$$

$$[\vec{r}_{11}, \vec{F}_{12}] + [\vec{r}_{12}, \vec{F}_{11}] = \vec{M}_{12}$$

$$[\vec{r}_{12}, \vec{F}_{12}] = \vec{M}_{11}$$

$$\text{--- II ---} \quad \vec{N}_{11} = [\vec{r}_{12}, m \vec{v}_{12}]$$

§ 22. Момент импульса вращающегося тела

Момент импульса тела, вращающегося
вокруг неподвижной оси

$$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

$$\vec{N}_{11} = \left(\sum_i \vec{N}_i \right)_{11} = \sum_i N_{i11} = \sum_i [\vec{r}_{i1}, m_i \vec{v}_{i1}]$$

↑ составляющая момента импульса, паралл. оси вращения
(м.к. тело вращается)

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i1} = [\vec{\omega}, \vec{r}_i] = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i1}]$$

$$\vec{N}_{11} = \sum_i m_i [\vec{r}_{i1}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{i1}]]$$

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$$

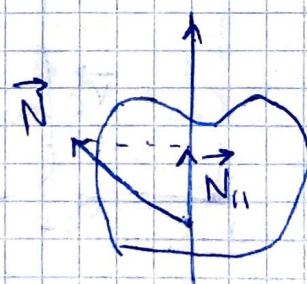
$$\vec{N}_{11} = \sum_i m_i \left[\vec{\omega} r_{i1}^2 - \vec{r}_{i1} \cdot \underbrace{(\vec{r}_{i1}, \vec{\omega})}_{=0} \right]$$

$$\vec{N}_{11} = \vec{\omega} \sum_i m_i r_{i1}^2$$

$$\vec{N}_{11} = I \vec{\omega}$$

$$I = \sum_i m_i r_{i1}^2$$

момент инерции тела

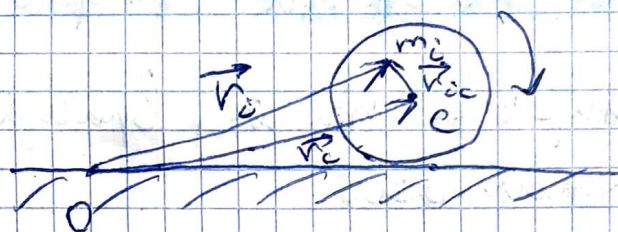


• Момент импульса тела относительно оси вращения

$$\vec{N}_{||} = I \vec{\omega}$$

$$N_z = I \omega_z$$

• Момент импульса тела, совершающего плоское движение



$$\vec{N} = \vec{N}_c + \vec{N}_{oc}$$

Перенесём в со. центра масс:

$$\vec{N}_{||} = \vec{N}_{c||} + \vec{N}_{oc||}$$

(параллельно оси вращения)

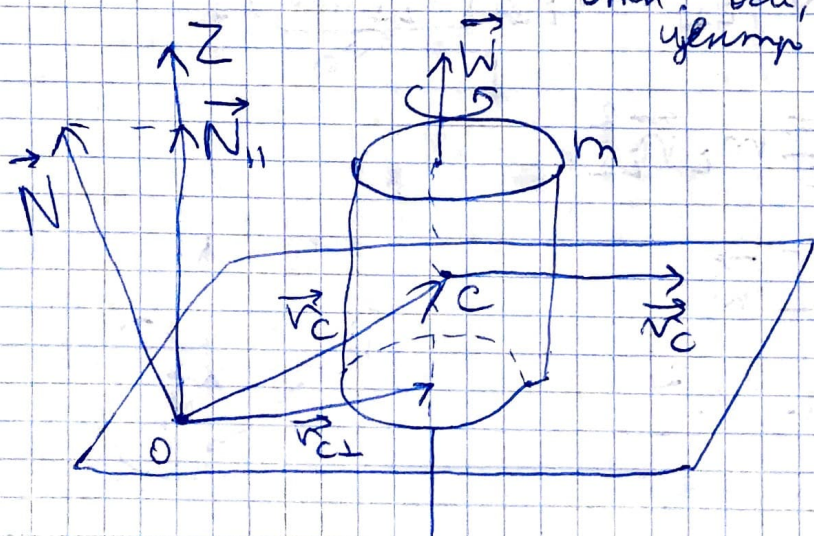
$$\vec{N}_{oc||} = I \vec{\omega}$$

$$\vec{N}_{c||} = [\vec{r}_{c\perp}, m \vec{v}_c]$$

здесь $\vec{r}_{c\perp}$ — вектор со см. перп. ос.

$$\vec{N}_{||} = [\vec{r}_{c\perp}, m \vec{v}_c] + I \vec{\omega}$$

момент инерции, отн. оси, проходящей через центр масс.



§23. Теорема моментов. Закон сохранения момента импульса.

- Теорема моментов для мат. точки:

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

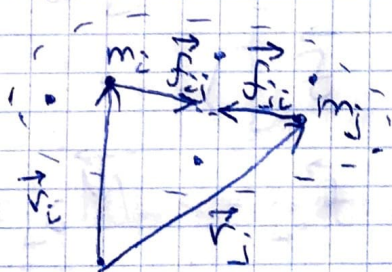
$$\dot{\vec{N}} = [\dot{\vec{r}}, m\vec{v}] + [\vec{r}, m\dot{\vec{v}}] = [\dot{\vec{r}}, m\vec{v}] + [\vec{r}, \underset{0}{m\dot{\vec{v}}}] + [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$[\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}$$

$$\dot{\vec{N}} = \vec{M}$$

Формулировка: скорость изменения момента импульса мат. точки равна моменту, действующей на неё силы.

- Теорема моментов для системы частиц:



$$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i [\dot{\vec{r}}_i, m_i \vec{v}_i] + \sum_i [\vec{r}_i, m_i \dot{\vec{v}}_i]$$

$$[\dot{\vec{r}}_i, m_i \vec{v}_i] = [\vec{v}_i, m_i \vec{v}_i] = 0$$

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = m_i \vec{a}_i = \underset{\text{внешние силы}}{\vec{F}_i} + \sum_j \underset{\text{внутренние}}{\vec{F}_{ij}}$$

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}]$$

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] + \sum_i [\vec{r}_i, \sum_j \vec{F}_{ij}]$$

$$\vec{M}_{\text{внеш}} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$$

сумма моментов вн. сил

$$\vec{M}_{\text{внут}} = \sum_i [\vec{r}_i, \sum_j \vec{F}_{ij}]$$

сумма моментов внутренних сил

$$\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{\text{внеш}} + \vec{M}_{\text{внут}}$$

Покажем, что $\vec{M}_{\text{внут}} = 0$ $\forall$ мех. системы

$$\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] + [\vec{r}_j, \vec{F}_{ji}]$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] - [\vec{r}_j, \vec{F}_{ij}]$$

$$\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{F}_{ij}]$$

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j \parallel \vec{F}_{ij} \Rightarrow \vec{M}_{ij} = 0$$

$$\vec{M}_{\text{внут}} = \sum_i \sum_j \vec{M}_{ij} = 0$$

Тогда : $\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{\text{внеш}}$

Формулировка: скорость изменения момента импульса системы равна сумме моментов внешних сил.

• **Закон сохранения момента импульса.**

Если сумма моментов внешних сил равна нулю, то момент импульса системы

сохраняется.

$$\vec{M}_{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \text{const}$$

• Теорема моментов относительно оси.

$$\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{\text{внеш}}$$

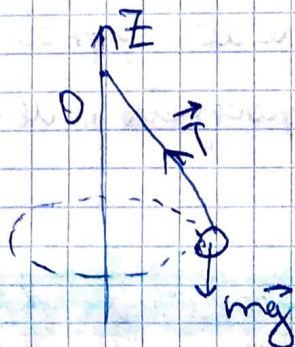
$$\dot{N}_z = M_z$$

Формулировка: скорость изменения момента импульса системы отн. оси равна сумме моментов внешних сил отн. этой же оси

• Закон сохранения момента импульса относительно оси

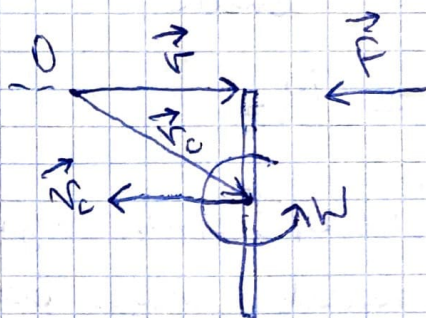
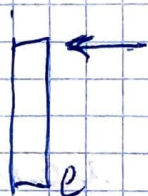
Если $\exists$ такая ось, отн. которой сумма моментов внешних сил равна нулю, то отн. этой оси момент импульса системы сохраняется

$$M_z = 0 \Rightarrow N_z = \text{const}$$



$$M_z = 0 \rightarrow N_z = \text{const}$$

Пример: На ^{горизонтальной} наклонной ^{плоскости} столе лежит стержень длины l . По одному из концов стержня нанесен удар в направлении перпендикулярном стержню. Найти, на какое расстояние сместится центр стержня за время его полного оборота.



$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = 0 \Rightarrow \vec{N} = \text{const} = 0$$

мгновенное

$$\vec{N}_{||} = [\vec{v}_c, m\vec{v}_c] + I\vec{\omega}$$

$$\vec{N} = [\vec{v}_c, m\vec{v}_c] + I\vec{\omega} = 0$$

$$\frac{l}{2} m v_c = I \omega = I \frac{2\pi}{T}$$

$$\alpha = \omega T = \frac{2I}{ml} \cdot 2\pi$$

$$I = \frac{ml^2}{12} \Rightarrow \alpha = l \cdot \frac{\pi}{3}$$

($\vec{N} = \vec{N}_{||}$, т.к. всё тело лежит в одной пл-ти, все векторы скоростей лежат в одной пл-ти)

§24. Материальная точка в центральном поле.

Опр. центр. поле в книге §16

Сохранение момента импульса:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = 0 \quad (\text{из рисунка})$$

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = \text{const}$$

Сохранение энергии:

$$E = K + \Pi = \text{const} \quad (\text{м.к. - сила постоянна} \rightarrow \text{постоянная сила})$$

$$K = \frac{mv^2}{2}, \quad \Pi = -\frac{A}{r}, \quad A = GMm$$

Следствия:

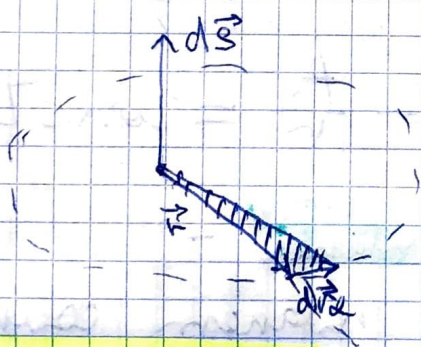
- Плоский характер движения м.к. в центральных поле: (это значит, что м.к. движется в одной плоскости, не выходя из нее)

$$\text{м.к.} \quad \vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = \text{const}$$

- Секторная скорость м.к.:

$$d\vec{S} = \frac{1}{2} [\vec{r}, d\vec{r}]$$

$$dS = \frac{1}{2} r dr \sin \alpha$$



- Секторная скорость

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \left[\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{1}{2} [\vec{r}, \vec{v}] = \frac{\vec{N}}{2m}$$

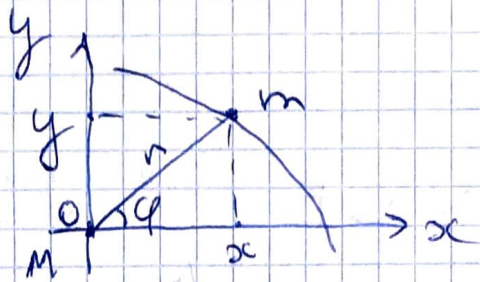
$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = \text{const}$$

- Сохранение секторной скорости материальной точки при движении в центр. силовом поле

$$\vec{N} = \text{const} \Rightarrow \vec{\sigma} = \text{const}$$



Угловая скорость $\dot{\varphi}$ и момент импульса в полярных координатах



$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = m \vec{k} (x\dot{y} - y\dot{x}) =$$

$$= \vec{k} m r^2 \dot{\varphi}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const} \end{array} \right. \quad - \text{ момент импульса}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{A}{r} = \text{const} \end{array} \right. \quad - \text{ энергия}$$

§ 25. Законы Кеплера -

- законы движения планет солнечной системы

I закон Кеплера: планеты солнечной системы движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце

II закон Кеплера: за равные промежутки времени радиус-вектор планеты описывает равные площади

III закон Кеплера: квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших

получают для эллиптических орбит.

- Уравнение траектории материальной точки в центральном силовом поле

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad ; p, \varepsilon = \text{const}$$

p — фокальный параметр

ε — эксцентриситет орбиты

- Типы траекторий: окружность, эллипс, парабола, гипербола

$$\varepsilon = 0$$

окружность

$$0 < \varepsilon < 1$$

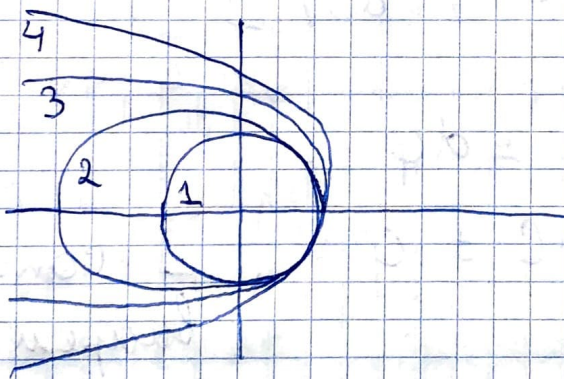
эллипс

$$\varepsilon = 1$$

парабола

$$\varepsilon > 1$$

гипербола



- Вывод уравнения траектории:

$$N = mr^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{N}{mr^2} \quad (*)$$

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{A}{r} \Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2 r^2}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2 r^2}} \Rightarrow \text{используем } (*)$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{mr^2}{N} \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2 r^2}}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r^2 \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2 r} - \frac{1}{r^2}}$$

$$\frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2 r} - \frac{1}{r^2}}} = \pm d\varphi$$

$$s = \frac{1}{r}, \quad ds = -\frac{1}{r^2} dr$$

$$\frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2} s - s^2}} = \pm d\varphi$$

$$\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2} s - s^2 = -\left(s - \frac{mA}{N^2}\right)^2 + \frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4} \equiv$$

$$= a^2 - x^2, \quad \text{где } a = \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4}}$$

$$x = s - \frac{mA}{N^2} \Rightarrow dx = ds$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm d\varphi$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = d\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) \quad \Rightarrow$$

$$d\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) = \pm d\varphi$$

$$\arcsin \frac{x}{a} = C \pm \varphi, \quad \left. \begin{array}{l} \text{const} = \frac{\pi}{2} \text{ и} \\ \text{большее значение} \end{array} \right\} \text{ "1"$$

$$\arcsin x\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\frac{x}{a} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi \Rightarrow x = a \cos \varphi$$

$$x = s - \frac{mA}{N^2} = \frac{1}{r} - \frac{mA}{N^2}$$

$$\frac{1}{r} - \frac{mA}{N^2} = a \cos \varphi$$

$$r = \frac{1}{\frac{mA}{N^2} + a \cos \varphi} = \frac{\frac{N^2}{mA}}{1 + \frac{N^2 a}{mA} \cos \varphi}$$

$$r = \frac{P}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

$$p = \frac{N^2}{mA}, \quad \epsilon = \frac{N^2 a}{mA} = \frac{N^2}{mA} \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4}}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2N^2 E}{mA^2}}$$

$$A = GMm$$

Омега и а. Из Кемпера

§26. Творение гвинченне твёрдого тела

• Уравнение гвинченне центра масс.

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_{внеш}$$

• Уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси

по теор. мом. инерции: $\dot{N}_z = M_z$

$$(из 22 §): \quad N_z = \underset{\downarrow}{I} \omega_z \quad ; \quad \omega_z = \dot{\varphi}$$

$$I \dot{\omega}_z = M_z$$

• Уравнение гвинченне вращения тела

$$\epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

$$\epsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$$

$$[\epsilon_z] = \frac{rad}{s^2}$$

$\Downarrow$

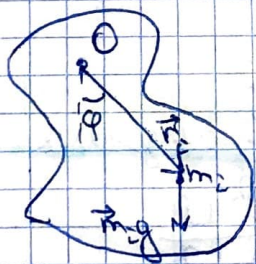
$$I \epsilon_z = M_z \quad (I \ddot{\varphi} = M_z)$$

Уравнение вращения тела в поступательном движении. С.О., связанной с центром масс:

$$I \varepsilon_z = M_z$$

(ось, проходящая через центр масс тела)
(в такой С.О. может появиться сила инерции, но поскольку поле переносной силы инерции является однородным силовым полем, то суммарная сила будет приложена к ц.м. тела, и поэтому она будет иметь нулевое плечо отн. ц.м. $\Rightarrow$ момент сил инерции будет равен нулю и ур-ние сохраняет свой вид)

Уравнение колебаний физического маятника
Физический маятник — тело произвольной формы и произвольного размера, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения



$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{g}]$$

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{g}]$$

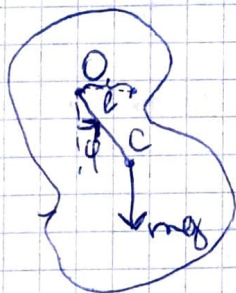
$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{g}] = [\sum_i m_i \vec{r}_i, \vec{g}] = [m \vec{r}_c, \vec{g}]$$

$$\vec{M} = [\vec{r}_c, m \vec{g}]$$

Суммарный момент сил тяжести, действующих на тело таков, как если бы все

масса тела сосредоточена в его ц. м.

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$



ось вращения
вдоль точки O,
и нам в сторону,
перпендикулярно рисунку

$$\vec{M}_O = [\vec{r}_c \perp, m\vec{g}]$$

$$M_z = -M_{||}$$

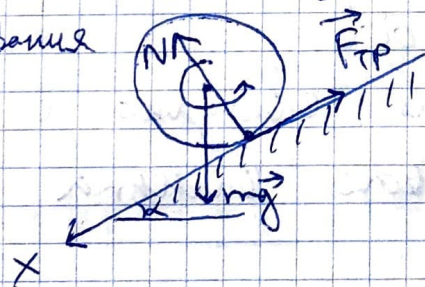
$$M_{||} = mgl \sin \varphi$$

$$M_z = -mgl \sin \varphi$$

$$I \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I} \sin \varphi = 0$$

• Считывание угла по наклонной плоскости
гв.м. без проскальзывания



качение без проскаль-
зывания возможно
без $F_{тр}$

ОХ: $m \ddot{x} = mg \sin \alpha - F_{тр}$ (уп-ние гв-ние центра масс)

$$I \varepsilon_z = M_z$$

$$M_z = R \cdot F_{тр} \quad \left(\begin{array}{l} \text{мг и } N \\ \text{равно нулю} \end{array} \right)$$

$$x = R \varphi \quad \left(\begin{array}{l} \text{без проскальзывания} \\ \text{гв-ние гв-ние} \end{array} \right)$$

$$\ddot{x} = R \ddot{\varphi}, \quad \ddot{\varphi} = \varepsilon_z$$

Тогда $I \varepsilon_z = R \cdot F_{\text{тр}}$

$$\ddot{x} = R \varepsilon_z$$

~~$\ddot{x} = g \frac{\sin \alpha}{1 + I/mR^2}$~~ Тогда считаем γ -мод.

$$\ddot{x} = g \frac{\sin \alpha}{1 + I/mR^2}$$

Для шарика $I = \frac{mR^2}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

• Связь скорости, описывающих motion движение материальной точки

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

$$I \varepsilon_z = M_z$$

γ -мод справедливо в виде уравнений (см. ниже)

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = d\omega_z/dt$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} = d\varphi/dt$$

направление момента γ мод связано с направлением оси z правилом правой руки

$$\vec{p} = m \vec{v}_c$$

$$\vec{N}_{II} = [\vec{v}_c, m \vec{v}_c] + I \vec{\omega}$$

$$K = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}$$

$$N_z = I \omega_z$$

$$K = \frac{I \omega^2}{2}$$

Вектор вращения
Вектор углового
оси

§27. Момент инерции тела

Момент инерции тела относительно данной оси — это величина, определяемая ф-той

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

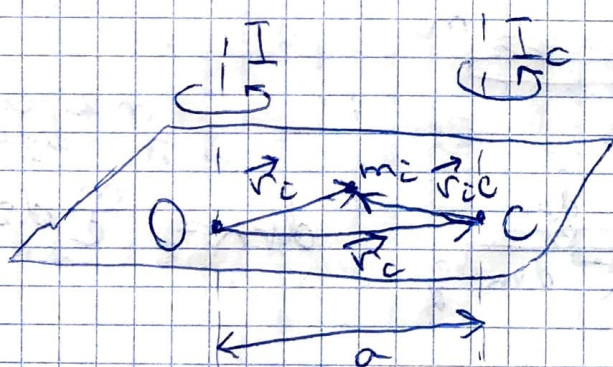
$r_{i\perp}$ — р-ие от точки до оси вращения



$$[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Теорема Штейнера - Штейнера: момент инерции тела отн. данной оси равен моменту инерции отн. оси, проходящей через центр масс тела, параллельно данной, плюс масса тела, умноженная на квадрат расстояния между осями.

$$I = I_c + ma^2$$



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

$$\vec{r}_{i\perp} = \vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}$$

(перпендикулярные оси вращения)

$$r_{i\perp}^2 = \vec{r}_{i\perp} \cdot \vec{r}_{i\perp} = (\vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}) \cdot (\vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp})$$

$$r_{i\perp}^2 = r_{c\perp}^2 + 2\vec{r}_{c\perp} \cdot \vec{r}_{ic\perp} + r_{ic\perp}^2$$

$$r_{c\perp} = a$$

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = ma^2 + 2\vec{r}_{c\perp} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_{ic\perp} + \sum_i m_i r_{ic\perp}^2$$

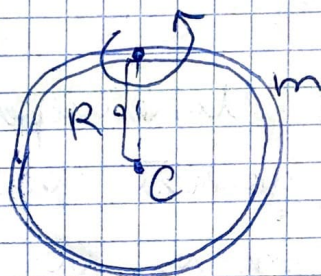
$$\sum_i m_i v_{ic\perp}^2 = I_c$$

$$\sum m_i \vec{v}_{ic\perp} = 0, \text{ м.к.}$$

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \vec{v}_{ic} &= \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = \sum_i m_i \vec{v}_i - m \vec{v}_c = \\ &= \frac{1}{2} \vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i = 0, \text{ а значит} \\ &\text{равна нулю, составляющие этого вектора,} \\ &\text{перпендикулярные любой оси.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = I_c + m a^2$$

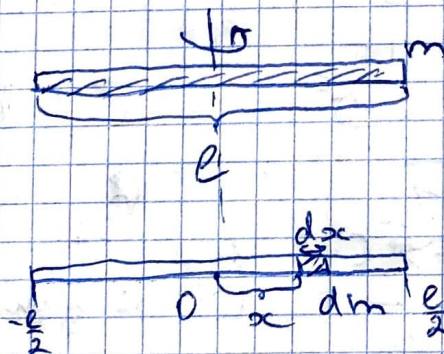
Пример:



обруч

Момент инерции относительно оси, через центр $= mR^2$
По Th. Гюльмена Уинштейна: $I = I_c + mR^2 = 2mR^2$

Момент инерции стержня



м.к. стержня
→ сосредоточен

$$dm = \frac{m}{l} dx$$

$$dI = x^2 dm \quad - \text{элементарный момент инерции} \\ \text{относительно оси Гюльмена}$$

$$dI = \frac{m}{l} x^2 dx$$

$$I = \int dI = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m l^3}{12}$$

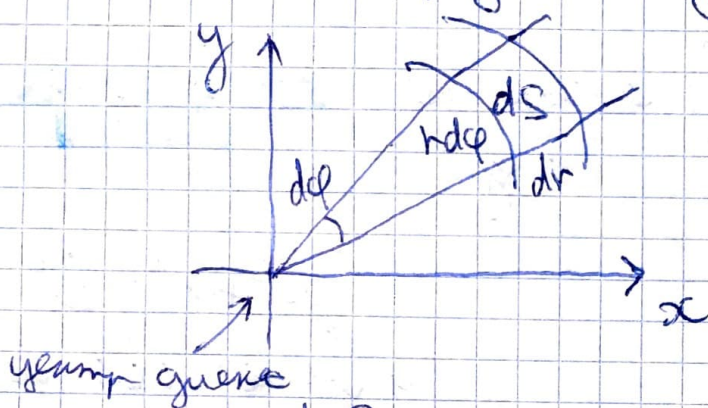
Момент инерции относительно края:

$$I = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

или

$$I = \int dI = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{ml^2}{3}$$

• Момент инерции диска



$$dS = r dr d\varphi$$

$$dm = \frac{m}{S} dS \quad (\text{однородность})$$

$$S = \int dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr = 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

$$dI = r^2 dm = \frac{m}{S} r^2 r dr d\varphi$$

$$I = \int dI = \frac{m}{S} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr$$

$$I = \frac{m}{S} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{m}{\pi R^2 2\pi} \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

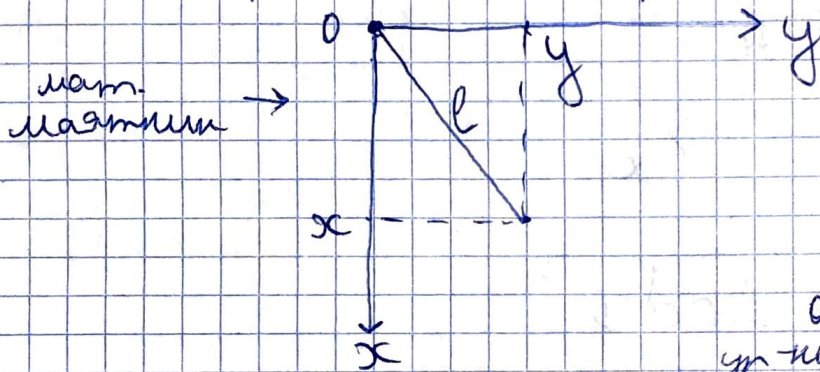
Момент инерции диска относительно оси, проходящей через край

$$I = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$$

§28. Системы со связями. Степени свободы. Обобщённые координаты.

Связи в механике - вытекающие из уравнений движения, ограничения на координаты, скорости, и ускорения точек механической системы.

Эти ограничения выражаются **уравнениями связи**.



$$x^2 + y^2 = l^2$$

уравнение связи

отсюда все вытекают уравнения для скоростей и ускорений

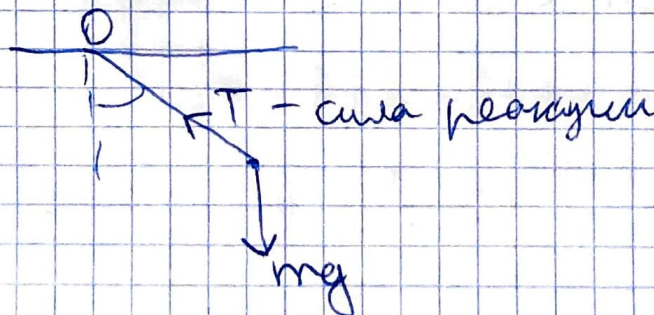
качение колеса без проскальзывания



$$s = R\varphi - \text{если без проскальзывания}$$

Заданные силы - известные постоянные силы или известные функции координат частиц. (центр. сила тяжести и сила упругости)

Силы реакции - силы, с которыми тела, осуществляющие связи действуют на тела системы



Геометрические связи - связи, которые сводятся к ограничениям только на координаты тел.

$$x^2 + y^2 = l^2, \quad x = R \varphi$$

Пример геометрической связи: шар, натянутый на плоскости

$$\vec{r} = [\vec{w}, \vec{R}] \quad (\text{при учёте того без проскальзывания})$$

(т.к. w - не спина. и не может быть проинтегрировано)

Стационарные связи: связь, наз-ая стационарной, если урав-ние связи не содержит времени в явном виде.

$$x^2 + y^2 = l^2, \quad x = R \varphi$$

Пример нестационарной связи: маятник, у которого длина нити меняется по заданному закону.

$$x^2 + y^2 = l^2(t)$$

Число степеней свободы системы - это число независимых координат полностью определяющих положение системы в пространстве.

Обозн.: S

Пример: $S = 3N - K$, где N - число точек, а K - число связей

Число степеней свободы твёрдого тела равно 6, т.к. положение в пространстве твёрдого тела однозначно определяется положением жёсткого треугольника, связанного с этим телом. (а кол-во степеней свободы у т-ка равно 6)

Обобщённые координаты — это любые S координат, полностью определяющие положение системы в пространстве.

Обозн: $q_1, q_2, \dots, q_s$ $\{q\}$
 s — число степеней свободы

Обобщённые скорости — производные обобщённых координат по времени

Обозн: $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ $\{\dot{q}\}$

Свойства обобщённых координат:

1) ~~Обобщённые координаты~~

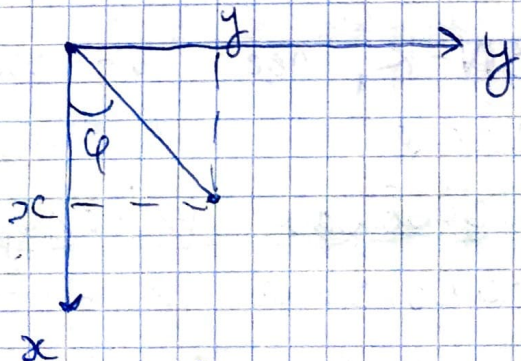
1) Радиус-векторы точек системы являются однозначными функциями обобщённых координат.

$$\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

если система имеет постоянную связь

Если система стационарная, то

$$\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, q_2, \dots, q_s)$$



$$s = 1$$

$$q = \varphi$$

$$x = l \cos \varphi, \quad y = l \sin \varphi$$

2) Обобщённые координаты обращают уравнения связей в тождество.

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

§29. Виртуальные перемещения. Виртуальная работа. Идеальные связи.

Виртуальные перемещения — это перемещения, допускаемые связями, в данный фиксированный момент времени

Вектор виртуального перемещения:

$$\delta \vec{r}_e = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \delta q_j$$

δ — дифференциал

вытекает из св-ва обобщ. координат:

$$\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$$

- Символ δ действует так же, как дифференциал по отношению к координатам, но не ко времени.

Виртуальная работа — работа силы на виртуальном перемещении

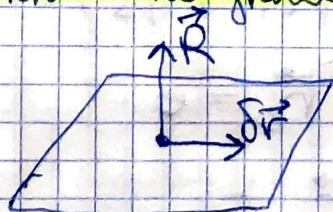
$$\delta A = \vec{F} \delta \vec{r}$$

Идеальные связи — это связи, для которых виртуальная работа сил реакции равна нулю.

$$\delta A_R = \sum_{e=1}^N \vec{R}_e \delta \vec{r}_e = 0$$

Примеры идеальных связей:

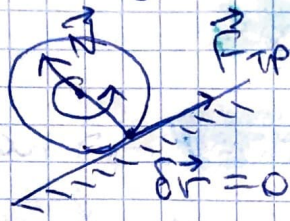
- 1) Абсолютно гладкая поверхность



$$\delta A_R = \vec{R} \delta \vec{r} = 0$$

(отсутствует сила трения)

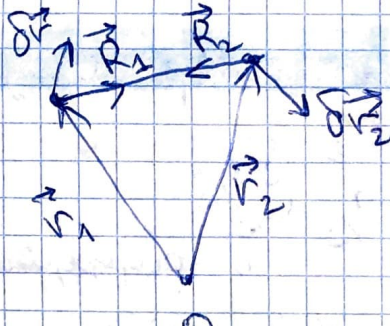
2) Каноническое без проскальзывания



$$\delta A_R = \vec{R} \delta \vec{r} = 0$$

$\delta \vec{r} = 0$ (м.к. без проскальзывания)

3) Небесный механический маятник



$$\delta A_R = \vec{R}_1 \delta \vec{r}_1 + \vec{R}_2 \delta \vec{r}_2, \quad \vec{R}_1 = -\vec{R}_2$$

$$\delta A_R = \vec{R}_2 \delta \vec{r}_1 - \vec{R}_1 \delta \vec{r}_2 = (\vec{R}_1, \delta \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_2)$$

м.к. δ -группы

$$\delta A_R = (\vec{R}_1, \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) = \vec{R}_1 \delta \vec{r}$$

$$\vec{R}_1 = \lambda \vec{r}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \text{зависимые все время маятника}$$

$$\delta A_R = \vec{R}_1 \delta \vec{r} = \lambda \vec{r} \delta \vec{r} = \frac{1}{2} \lambda \delta(r^2) = \frac{1}{2} \lambda \delta(l^2) = 0$$

§30. Уравнения Лагранжа. Обобщенные силы

м.к. $l = \text{const}$

$\mathcal{L}$ -мех системы с идеальными связями
связями и без них упр-ние движения таких
систем

Уравнения движения идеальной механической системы

$$\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$$

$$\delta A_R = \sum_{e=1}^{N_s} \vec{R}_e \delta \vec{r}_e = 0$$

$$\delta \vec{r}_e = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \delta q_j$$

II з. Лангмюна: $m_e \ddot{\vec{r}}_e = \vec{F}_e + \vec{R}_e$
 запяная связь
 $e = 1, 2, \dots, N$

• Умножение на реакцию

$$m_e \ddot{\vec{r}}_e - \vec{F}_e = \vec{R}_e \quad | \cdot \text{скал на } \delta \vec{r}_e$$

$$\sum_{e=1}^N (m_e \ddot{\vec{r}}_e - \vec{F}_e) \delta \vec{r}_e = 0$$

и возмущенную систему
на всех точках системы

↑
 из-за уравнение Лагранжа - Лагранжа

• Переход к обобщенным координатам.

$$\sum_{e=1}^N (m_e \ddot{\vec{r}}_e - \vec{F}_e) \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^s \delta q_j \sum_{e=1}^N (m_e \ddot{\vec{r}}_e - \vec{F}_e) \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} = 0$$

$$X_j = \sum_{e=1}^N m_e \ddot{\vec{r}}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}$$

$$Q_j = \sum_{e=1}^N \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}$$

$$\sum_{j=1}^s (X_j - Q_j) \delta q_j = 0$$

из независимости обобщ. координат $\Rightarrow$ что

$\forall j$ $X_j = Q_j \quad , j = 1, 2, \dots, s$

Уравнения Лагранжа относительно кинетической энергии

Покажем, что $X_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N m_e v_e^2 = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \vec{v}_e$$

$$\vec{v}_e = \dot{\vec{r}}_e, \quad \vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

$$\vec{v}_e = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial t} = \vec{v}_e(q, \dot{q}, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}$$

$$K = K(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \vec{v}_e = \sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \vec{v}_e = \sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\text{Итак} \quad \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \rightarrow$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} =$$

$$= \sum_{e=1}^N m_e \dot{\vec{v}}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} + \sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) = X_j + \frac{\partial K}{\partial q_j} \Rightarrow$$

$$X_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

• Уравнение Лагранжа отн. кин. энергии

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j \quad \leftarrow \text{у-ние Лагранжа}$$

$$Q_j = \sum_{e=1}^N \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \quad j = \overline{1, 5}$$

Обобщенная сила — это величина, определяемая формулой

$$Q_j = \sum_{e=1}^N \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1, 5}$$

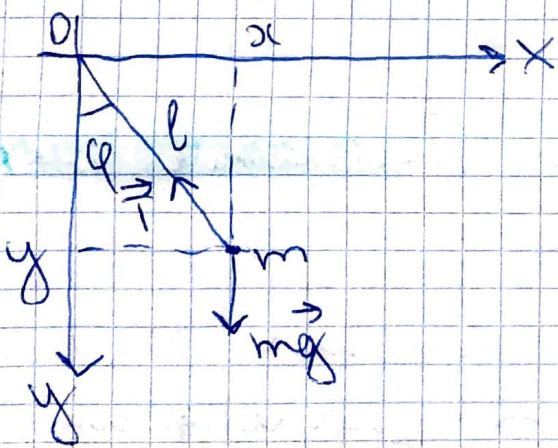
$$[Q] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{[q]}$$

$$[q] = \text{м} \rightarrow [Q] = \text{Н} \quad \leftarrow \text{сила}$$

$$[q] = 1 \rightarrow [Q] = \text{Н} \cdot \text{м} \quad \leftarrow \text{момент силы}$$

Безразмерная

• Пример — математический маятник



$$s = 1, \quad q = \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \varphi} = Q$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$Q = m \vec{g} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$$

$$x = l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi$$

$$\dot{x} = l \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y} = -l \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$Q = m \vec{g} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = m g l \sin \varphi \quad \text{у } y \text{ только "y" координата}$$

$$= m g \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -m g l \sin \varphi$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m l^2 \ddot{\varphi}$$

Подставляем всё в уравнение движения:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \varphi} = Q$$

$$m l^2 \ddot{\varphi} = -m g l \sin \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

уравнение движения маятника

• Другим способом:

$$m \ddot{x} = -T \sin \varphi$$

$$m \ddot{y} = m g - T \cos \varphi$$

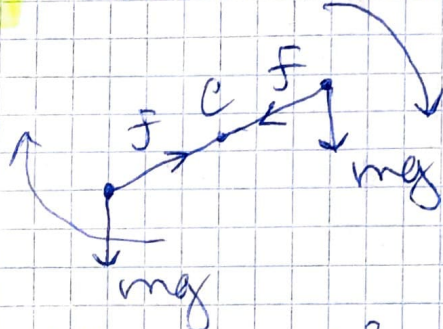
$$x^2 + y^2 = l^2$$

§31. Уравнения Лагранжа. Обобщённые импульсы

T-ли системы с идеальными связями и потенциальными

заданным силами.

Пример: нить связанных тел
5 степеней свободы



$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2$$

Уравнение движения идеальной механической системы с помощью заданных сил.

$$\vec{F}_e = -\text{grad} \Pi_e = -\left(\vec{i} \frac{\partial \Pi_e}{\partial x_e} + \vec{j} \frac{\partial \Pi_e}{\partial y_e} + \vec{k} \frac{\partial \Pi_e}{\partial z_e} \right)$$

$$\Pi_e = \Pi_e(\vec{r})$$

зависимость всех радиус-векторов системы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j$$

$$Q_j = \sum_{e=1}^N \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}$$

$$j = 1, 2, \dots, S$$

$$K = K(q, \dot{q}, t)$$

$$\vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} = - \left(\frac{\partial \Pi_e}{\partial x_e} \frac{\partial x_e}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial y_e} \frac{\partial y_e}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial z_e} \frac{\partial z_e}{\partial q_j} \right)$$

$$\vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi_e}{\partial q_j}$$

(или з.п. основной функции)

$$\Pi_e = \Pi_e(q, t)$$

(t - если не постоянна)

$$\vec{r}_e = \vec{r}_e(q, t)$$

$$Q_j = \sum_{e=1}^N \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} = - \sum_{e=1}^N \frac{\partial \Pi_e}{\partial q_j}$$

$$Q_j = - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{e=1}^N \Pi_e = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

$$\Pi = \sum_{e=1}^N \Pi_e = \Pi(q, t)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}_e = \vec{r}_e(q) \\ \Pi = \Pi(q) \end{array} \right\} \text{ в стая-связях}$$

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, S$$

- Обобщённая сила равна взятой со знаком минус частной производной потенциальной энергии системы по состав. обобщ. координ.

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (K - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial (K - \Pi)}{\partial q_j} = 0$$

или $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0$

Функция Лагранжа системы (лагранжиан) — это разность кинетической и потенциальной энергии системы, выраженная через обобщённые координаты, обобщённые скорости и время.

$$L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t)$$

$$L = L(q, \dot{q}) \quad \text{если в системе стая-связи}$$

Уравнения Лагранжа отн. ор-гии Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, S$$

Обобщенный импульс - это частная производная функции Лагранжа по обобщенной скорости

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

• Закон изменения обобщенного импульса:

из ур-ния Лагранжа $\Rightarrow$

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

• Закон сохранения обобщ. импульса:

- Если частная произв. ф-ция Лагранжа по обобщенной координате равна нулю, то соответствующий этой координате обобщ. импульс сохраняется

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow p_j = \text{const}$$

• Размерность обобщ. импульса определяется размерностью обобщенной координаты

$[m]$

$[кг \cdot \frac{m}{c}]$

обычный имп.

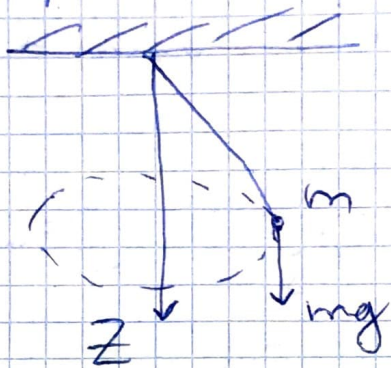
безразмерна (рад.)

$[кг \cdot \frac{m^2}{c}]$

момент имп.

Обобщ. импульс - ^{либо} проекция импульса на какую-то ось, либо момент импульса отн. какой-либо оси.

Пример: сферический мат. маятник



2 степени свободы
(3-1=2)

Экв. q -ые лагранжа не зависят от $\varphi \Rightarrow$ сопр. мом. импульса

§32. Уравнения Лагранжа. Канонические переменные.

T -ии системы с идеальными гомогенными связями и потенц. задан. силами, но используем для описания движения другой набор переменных (обобщ. координат и обобщ. импульсов)

Каноническими переменными наз-ся набор обобщ. координат и обобщ. импульсов в системе.

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, S$$

Уравнения движения уг. вел. системы с ном. зад. силами.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$j = \overline{1, S}$$

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t)$$

Классическая группа q -ых лагранжа

$$dL = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dL = \sum_{j=1}^s (\dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Динамическая Гамильтонова

$$H = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j p_j - L$$

$$dH = \sum_{j=1}^s (\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j) - dL$$

$$dH = \sum_{j=1}^s (\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j - \dot{p}_j dq_j - p_j d\dot{q}_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_{j=1}^s (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

(Динамическая) $H = H(q, p, t)$. Тогда

$$dH = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$H = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j p_j - L = H(q, p, t) \quad (*)$$

Динамическая Гамильтонова (или Гамильтонова)

система — это динамическая, определяемая формулой (*). (куда она выписана через q, p, t)

Уравнение Гамильтона

Управляем оба уравнения где dH :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j} \quad , j = \overline{1, s}$$

$$H = H(q, p, t)$$

§ 33. Гамильтониан консервативной системы

• Закон изменения гамильтониана:

$$H = H(q, p, t)$$

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

используя ур-ние Гамильтона:

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^s (-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

• Консервативная сис-ма — это сис-ма, гамильтониан которой не зависит явно от времени.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dot{H} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = H(q, p) = \text{const}$$

• Гамильтониан консервативной сис-мы и её ^{общая} механическая энергия

$$H = K + \Pi$$

(?)

$$(**) \vec{v}_e = \vec{v}_e(q_1, q_2, \dots, q_s)$$

(м.к. не зависит от t)

$$K = K(q, \dot{q})$$

$$\Pi = \Pi(q)$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (K - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}$$

$$j = \overline{1, s}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N m_e v_e^2 = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \vec{v}_e$$

$$\vec{v}_e = \dot{\vec{r}}_e, \text{ а м.к. требуемое } (***) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{z}_e = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad \text{Stange}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N m_e \sum_{\alpha=1}^S \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^S \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \sum_{\beta=1}^S \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \sum_{e=1}^N m_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\beta} \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \sum_{\beta=1}^S K_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \text{ vgl.}$$

$$K_{\alpha\beta} = \sum_{e=1}^N m_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\beta} = K_{\beta\alpha} = K_{\beta\alpha}(q)$$

$$p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \sum_{\beta=1}^S K_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \sum_{\beta=1}^S K_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_j} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \sum_{\beta=1}^S K_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{\alpha j}, \quad \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{\beta j}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_j = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \sum_{\beta=1}^S K_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \delta_{\beta j} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \sum_{\beta=1}^S K_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta \delta_{\alpha j} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^S K_{\alpha\beta} \delta_{\beta j} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^S \dot{q}_\beta \sum_{\alpha=1}^S K_{\alpha\beta} \delta_{\alpha j} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \dot{q}_\alpha K_{\alpha j} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^S \dot{q}_\beta K_{j\beta} = \frac{1}{2} \{ K_{j\beta} = K_{\beta j} \} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^S K_{j\alpha} \dot{q}_\alpha \Rightarrow p_j = \sum_{\alpha=1}^S K_{j\alpha} \dot{q}_\alpha, \quad j = \overline{1, S}$$

$$\sum_{j=1}^S \dot{q}_j p_j = \sum_{j=1}^S \dot{q}_j \sum_{\alpha=1}^S K_{j\alpha} \dot{q}_\alpha = \sum_{j=1}^S \sum_{\alpha=1}^S K_{j\alpha} \dot{q}_j \dot{q}_\alpha =$$

$$= 2K. \quad \text{Siegmanbau und 6 räumliche Dimensionen:}$$

$$H = \sum_{j=1}^S \dot{q}_j p_j - L = 2K - (K - \Pi) = K + \Pi$$

т.е. $H = K + \Pi = H(q, p)$

Гамильтониан консервативной сис-мы — это сумма кин. и пот. энергии сис-мы, выраженные через обобщ. коорд. и обобщ. импульсы

Пример: мат. точка в пот. силовом поле $S=3$

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z$$

$$\dot{q}_1 = \dot{x}, \quad \dot{q}_2 = \dot{y}, \quad \dot{q}_3 = \dot{z}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$p_x = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial K}{\partial \dot{y}} = m \dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial K}{\partial \dot{z}} = m \dot{z}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{1}{m} p_x, \quad \dot{y} = \frac{1}{m} p_y, \quad \dot{z} = \frac{1}{m} p_z$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

Тогда $H = K + \Pi = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z)$

§34. Равновесие системы и её устойчивость

Равновесие — это состояние, в котором система предоставленная самой себе может находиться сколь угодно долго.

Условия равновесия: В состоянии равновесия сумма сил, действующих на каждую мат. точку системы должна быть равна 0.

$$\vec{F}_e + \vec{R}_e = 0, \quad e = 1, 2, \dots, N$$

внешние силы силы реакции

Системы с идеальными связями (системы, в которых виртуальная работа сил реакции равна 0)

$$\sum_{e=1}^N (\vec{F}_e + \vec{R}_e) \delta \vec{r}_e = 0$$

$$\text{П.к.} \quad \sum_{e=1}^N \vec{R}_e \delta \vec{r}_e = 0 \quad (\text{по условию сис-мы с идеальными связями})$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{e=1}^N \vec{F}_e \delta \vec{r}_e = 0$$

$$\delta \vec{r}_e = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \delta q_j. \quad \text{Тогда получим}$$

$$\sum_{e=1}^N \vec{F}_e \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^S \delta q_j \sum_{e=1}^N \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} = 0 \quad (\text{для сис-мы с изг. полн. связями})$$

$$\text{П.к.} \quad Q_j = \sum_{e=1}^N \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \Rightarrow \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j = 0$$

$$\text{П.к.} \quad \delta q_j \text{ независимы} \Rightarrow \boxed{Q_j = 0, \quad j = \overline{1, S}}$$

Состояние равновесия: Все обобщённые силы должны быть равны 0. (для сис-мы с изг. полн. связями)

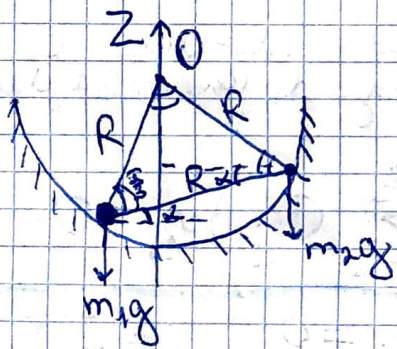
$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1, S}$$

П.е. в состоянии равновесия потенциальная энергия сис-мы должна иметь экстремум по всем обобщённым координатам.

Устойчивость равновесия: Равновесие устойчиво, если система, выведенная из этого состояния и предоставленная самой себе, начинает двигаться в сторону положения равновесия.

Т.к. $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$, то равновесие будет устойчивым тогда, когда в точке равновесия пот. энергия достигает минимума (т.к. $\vec{F} = -\text{grad} \Pi$, то сила всегда действует в направлении уменьшения пот. энергии). И если максимум, то равновесие неустойчиво.

Пример: найти условие равновесия нити в сферической чашке.



$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = 0 \quad (\text{будет минимум})$$

$$\Pi = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$$

$$z_1 = -R \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$$

$$z_2 = -R \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$\Pi = -gR \left[m_1 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + m_2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \right]$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = -gR \left[m_1 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - m_2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \right] = 0$$

$$m_1 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - m_2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$$

$$m_1(\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha) = m_2(\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha)$$

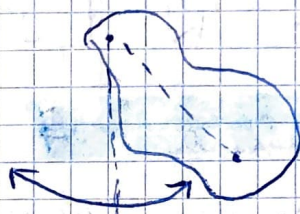
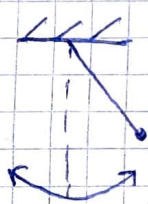
$$m_1(1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha) = m_2(1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha)$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha (m_1 + m_2) = m_1 - m_2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{3}(m_1 + m_2)}$$

§ 35. Колебания в системах с одной степенью свободы

Колебание — повторяющееся движение в окрестности положения устойчивого равновесия системы.



физический маятник

Период колебаний — продолжительность одного полного колебания системы

$$T \quad [c]$$

Уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

x — обобщ. координата, которая отсчитывается от положения равновесия системы

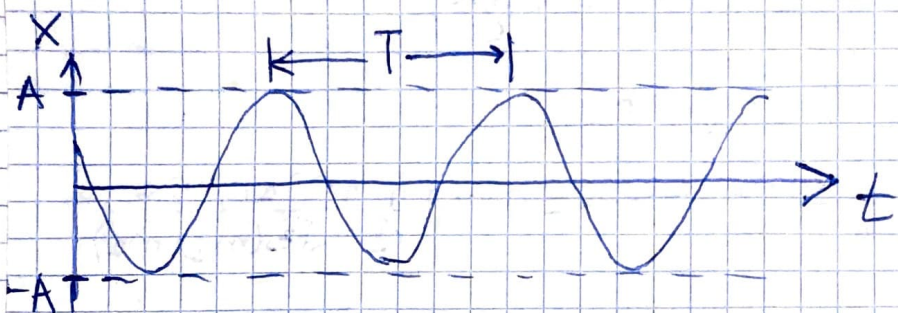
$$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$\omega \left[\frac{1}{c} \right]$ — частота колебаний

Общее решение: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

гармоническая ф-ция

Проверим:
$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -Aw \sin(\omega t + \varphi) \\ \ddot{x} &= -Aw^2 \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$



Амплитуда колебаний "A" — максимальное отклонение обобщённой координаты от равновесного значения. (имеет такую же размерность, как и "x", т.е. либо [м], либо [рад])

Частота — ω [с⁻¹]

Фаза колебаний Φ — аргумент тригонометрической ф-ции, описывающей процесс колебаний. $\Phi = \omega t + \varphi$

Начальная фаза — значение фазы в момент начала отсчёта времени.
 $\Phi(t=0) = \varphi$

Связь периода и частоты колебаний:

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Амплитуда и начальная фаза колебаний:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x} = -Aw \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(0) = A \cos \varphi \equiv x_0$$

$$\dot{x}(0) = -Aw \sin \varphi \equiv \dot{x}_0$$

$$A^2 = \left(x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} \right) \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2 / \omega^2}$$

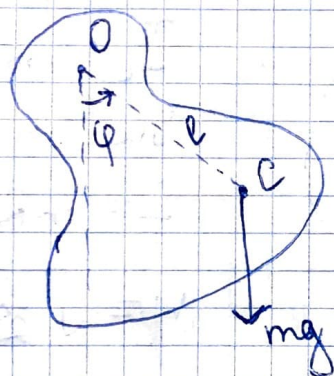
$$\cos \varphi = \frac{x_0}{A} \quad ; \quad \sin \varphi = - \frac{\dot{x}_0}{A\omega}$$

Определение частоты колебаний

Для того, чтобы найти частоту колебаний, нужно записать уравнение движения системы, а затем привести его к стандартному виду уравнения гармонических колебаний.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Пример: физический маятник (произвольное тело, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения)



φ — угол отклонения от положения равновесия

$$S=1 \quad q=\varphi$$

$$\dot{q} = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

угловая скорость

Для тела, имеющего неподвижную ось вращения:

$$K = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}$$

$$\Pi = -mgl \cos \varphi$$

$$L = K - \Pi = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mgl \cos \varphi = L(\varphi, \dot{\varphi})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = I\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi$$

$$I\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

Малые колебания - это колебания, которые удовлетворяют условию $\varphi \ll 1$ (рад) $\approx 5.2-60^\circ$

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

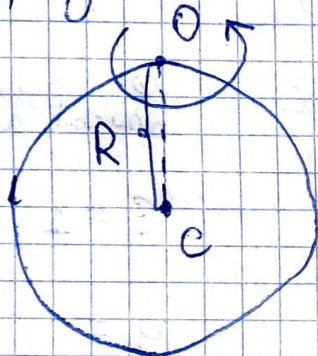
частота малых колебаний
физ. маятника

m - полная масса маятника,

l - расстояние от оси вращения до ц.м.

I - момент инерции маятника отн. оси вращения.

Пример: физ. маятник - обруч



$$I_c = mR^2$$

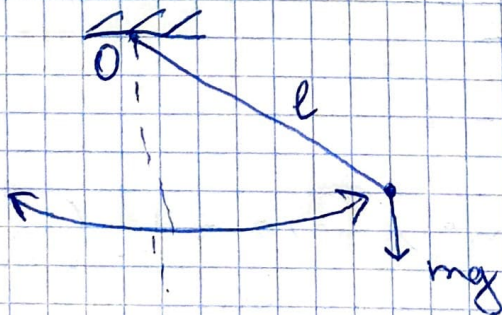
По Th. Штейнера-Гюйгенса:

$$I = mR^2 + I_c = 2mR^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

Пример: мат. маятник



$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

$$I = ml^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

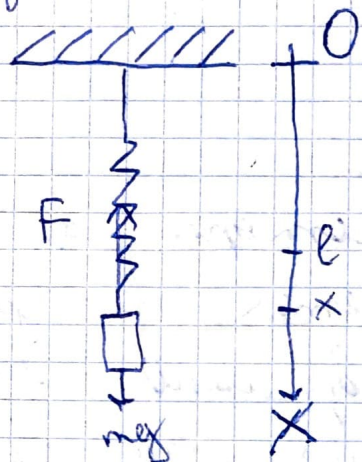
- **ф-ла Гюйгенса**

(ф-ла для периода малых колебаний мат. маятника)

$$\left. \begin{array}{l} l = 1 \text{ м} \\ g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \end{array} \right\} \Rightarrow T \approx 2 \text{ с}$$

Пример:

пружинный осциллятор



l - длина свободной пружины (на пружину не действуют никакие силы)

$$m\ddot{x} = mg - k(x - l)$$

$$F_x = -k(x - l)$$

$$m\ddot{x} + k(x - l - \frac{mg}{k})$$

$$\text{и т.к. } \ddot{x} = \ddot{y}, \text{ то}$$

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

§36. Физические эффекты в колебательных системах

Гармонические колебания:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Затухающие колебания:

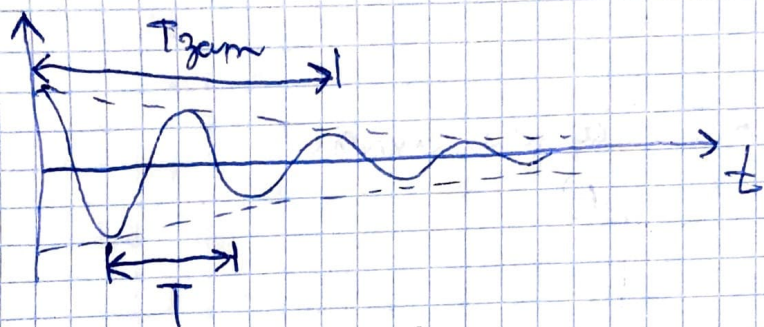
$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

x - обобщ. координата, отсчитыв. от положения равновесия

ω_0 - собствен. частота колебаний системы

λ - характеризует затухание колебаний

$2\pi\delta$ - что-то количество возмущения



T_{damp} - время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в два раза.

T - промежуток времени между двумя соседними экстремумами ф-ции $x(t)$

Добротность колебаний:

$$Q = \frac{T_{\text{damp}}}{T}$$

(она показывает сколько колебаний успеет произойти до того, как амплитуда колебаний существенно уменьшится)

Нелинейные колебания:

$$\ddot{x} + F(x) = 0$$

$F(x)$ - нелинейная ф-ция координаты x .

(например, мат. маятник при больших колебаниях)

Мат. маятник: $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$

Запишем ЭСД: $K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\varphi}^2$

$$\Pi = -mgl \cos \varphi$$

$$E = K + \Pi = \text{const}$$

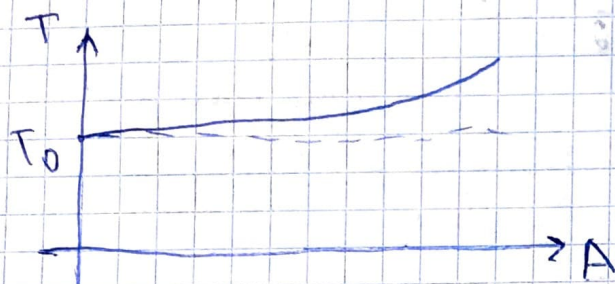
$$\frac{m}{2} \ell^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = E$$

$$\dot{\varphi}^2 - 2 \frac{g}{l} \cos \varphi = \frac{2E}{ml^2}$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2E}{ml^2} + 2 \frac{g}{l} \cos \varphi$$

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2E}{ml^2} + 2 \frac{g}{l} \cos \varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2E}{ml^2} + 2 \frac{g}{l} \cos \varphi}} = \pm \int_0^t dt = \pm t$$



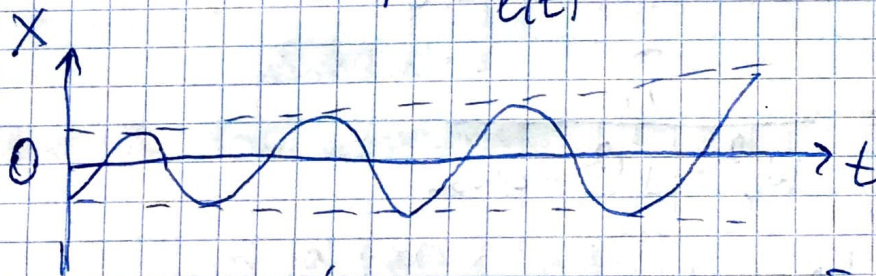
Для нелинейных колебаний характерен эффект зависимости периода колебаний от их амплитуды.

Параметрические колебания

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$$

Пример — мат. маятник, длина которого меняется по заданному закону

$$\omega^2(t) = \frac{g}{l(t)}$$



(параметрический резонанс)

Энергия колебательной системы возрастает за счёт работы силы, осуществляющей нестационарную связь.

Вынужденные колебания - колебания, происходящие под действием периодически меняющейся ~~своей~~ внешней силы

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$$

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} e^{i\varphi} + \frac{1}{2} e^{-i\varphi} \equiv \frac{1}{2} e^{i\varphi} + \text{k.c.}$$

компл. сопр.

$$F(t) = \frac{1}{2} F_0 e^{i\varphi} + \text{k.c.}$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{2} F_0 e^{i\omega t} + \text{k.c.}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} A e^{i\omega t} + \text{k.c.}$$

ищем решение в виде

$$\dot{x} = i\omega \frac{1}{2} A e^{i\omega t} + \text{k.c.}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \frac{1}{2} A e^{i\omega t} + \text{k.c.}$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha) A = F_0$$

$$A = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha}$$

$$A = |A| e^{i\varphi}$$

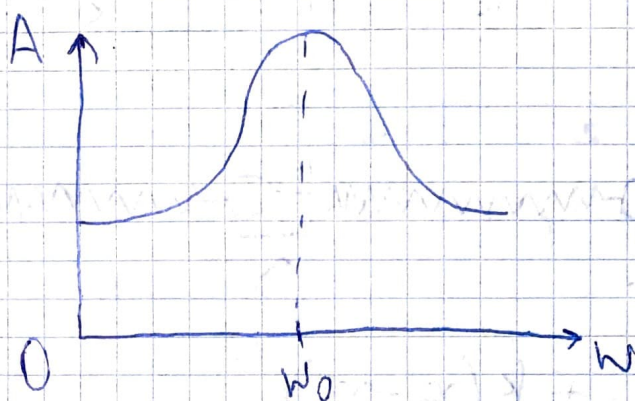
амплитуда
вынужд. колебаний

разность сдвиг между
колебаниями внешней силы
и вынужд. колебаниями

параметрами
и параметрами
этой сис-мы

Резонанс - возрастание амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты изменения внешней силы с собственной частотой колебаний системы

$$|A| = \left| \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \right|$$



Как связаны фазы колебаний (система и внешнего)?

$$A = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

Если $\omega = \omega_0 \Rightarrow A = \frac{F_0}{i\omega\gamma} = \frac{F_0}{\omega\gamma} e^{-\frac{i\pi}{2}}$
существует сдвиг по фазе $-\frac{\pi}{2}$

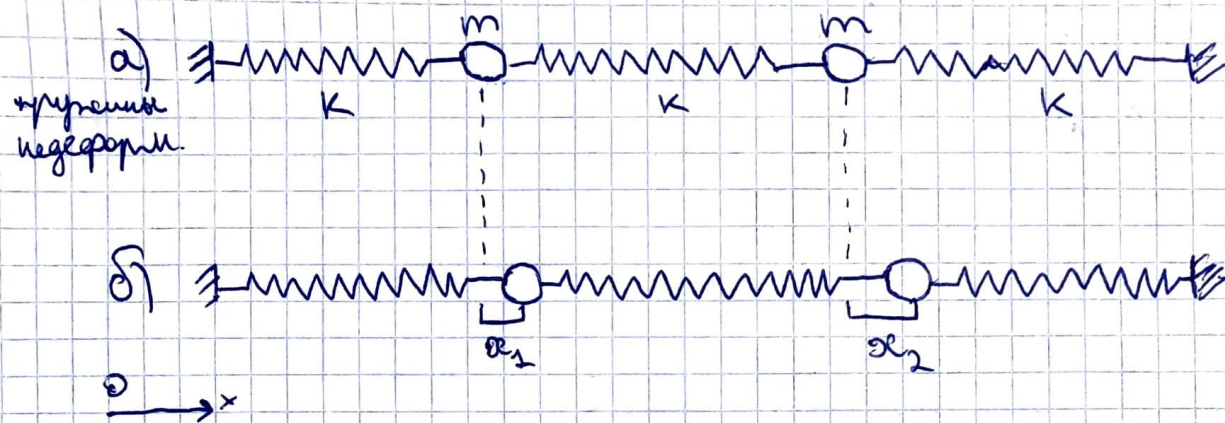
Если $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow A = \frac{F_0}{\omega_0^2}$
нет фазового сдвига

Если $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow A = -\frac{F_0}{\omega^2} = \frac{F_0}{\omega^2} e^{i\pi}$
существует сдвиг по фазе $-\pi$

§ 37. Нормальные колебания и нормальные координаты.

В этом параграфе мы р-им колеб. сис-му с 2-мя степенями свободы.

Колесания связанных осцилляторов



$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2$$

Ур-ние движения оказались связанными.
(в каждое ур-ие входят обе координаты)

Оказывается, можно найти такие линейные комбинации координат x_1, x_2 , что для них ур-ние движения окажется независимыми.

$$\oplus m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_2 + x_1)$$

$$\ominus m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -3k(x_2 - x_1)$$

Тогда $\theta_1 = x_2 + x_1$; $\theta_2 = x_2 - x_1$ - норм. коор. - норм. коор.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 &= 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{дв. ур-ие независимы}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} ; \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Тогда $x_1 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$; $x_2 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$

Нормальные координаты - координаты, которые при любых движениях системы меняются независимо друг от друга.
(θ_1, θ_2)

Собственные частоты колебаний - это частоты, на которых возможны гармонические колебания системы. (ω_1, ω_2)

Нормальные колебания - это гармонические колебания на одной из собственных частот системы.

$$x_1 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

$$x_2 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

Из независимости нормальных координат следует, что возможны такие решения колебаний, когда отлична от нуля только одна из нормальных координат.

Первое нормальное колебание:

Для этого нужно, чтобы координата θ_2 была равна нулю в $\forall$ момент t .

$$\theta_2(t) = 0$$

где это надо:

$$(*) \theta_2(t=0) = 0$$

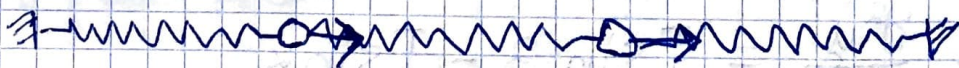
$$(**) \dot{\theta}_2(t=0) = 0$$

$$\text{Из } (*) \Rightarrow x_1(t=0) = x_2(t=0)$$

$$(**) \Rightarrow \dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0$$

$$x_1(t=0) = x_2(t=0)$$



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Второе уравнение колебание:

$$\theta_2(t) = 0$$

где это надо:

$$\theta_2(t=0) = 0$$

$$\dot{\theta}_2(t=0) = 0$$

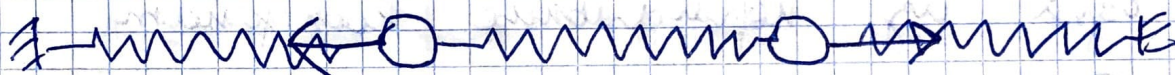
$\Downarrow$

$$x_2(t=0) = -x_2(t=0)$$

$$\dot{x}_2(t=0) = -\dot{x}_2(t=0)$$

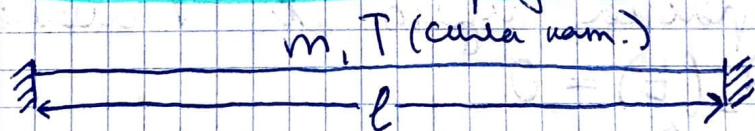
$$\dot{x}_2(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0$$

Итого $x_2(t=0) = -x_2(t=0)$

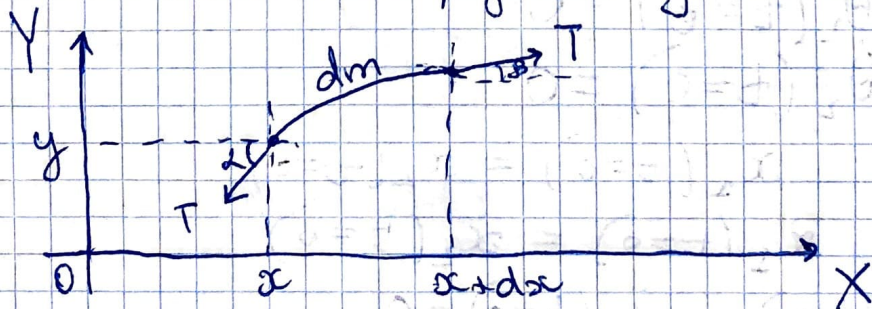


$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

§38. Колебание струны



Линейная масса струны $\rho = \frac{m}{l}$



Давление вверх на ось Y.

$$dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \sin \beta - T \sin \alpha$$

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx y'(x) \quad (\text{где малые углы})$$

$$\sin \beta \approx \tan \beta \approx y'(x+dx)$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T [y'(x+dx) - y'(x)]$$

$$dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot dx = \rho dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Решение волнового уравнения:

$$y(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

Первые волны:

$$x - vt = \text{const}$$

$$dx - v dt = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

Скорость распространения волны:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Стоячая волна - это волна, которая описывается произведением функций времени на функцию координаты

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Получим разное переменное одно ур-ние как раз в максимуме периода.

$$y(x, t) = X(x) \cdot \Theta(t)$$

$$X \ddot{\Theta} = v^2 X'' \Theta$$

$$\ddot{\Theta} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2}$$

$$X'' = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

$$\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = \frac{v^2 X''}{X}$$

$$\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = \frac{v^2 X''}{X} = \text{const} \quad \left(\begin{array}{l} \text{так как система экв.} \\ \text{переменное} \\ \text{она постоянна} \\ \text{и имеет размер } [s^{-2}] \end{array} \right)$$

$$\text{const} = -\omega^2$$

$$\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = \frac{v^2 X''}{X} = -\omega^2$$

$$\ddot{\Theta} + \omega^2 \Theta = 0$$

$$\Theta(t) = A \sin \omega t$$

$$X'' + \frac{\omega^2}{v^2} X = 0$$

$$X'' + k^2 X = 0, \quad k = \frac{\omega}{v}$$

$$X(x) = B \sin kx$$

Итого

$$y(x, t) = \text{const} \cdot \sin \omega t \cdot \sin kx$$

Период и частота колебаний струны

$$W = \frac{2\pi}{T}$$

Длина волны и волновое число

$$\lambda = vT$$

$$k = \frac{W}{\lambda} - \text{волновое число}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\int \begin{matrix} W = \frac{2\pi}{T} \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

Граничные условия:

$$y(x=0)=0, \quad y(x=l)=0$$

$$y(x,t) = \text{const} \cdot \sin \omega t \cdot \sin kx$$

при $x=0$ обращается

$$\text{при } x=l \Rightarrow \sin kl = 0$$

$$kl = \pi n \quad ; n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_n = n \cdot \frac{\pi}{l}$$

принимая во внимание волновое число

$$\omega_n = v k_n$$

$$\omega_n = n \cdot \frac{\pi}{l} \cdot v = n \cdot \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

набор частот колебаний

$$y_n(x,t) = \text{const} \cdot \sin \omega_n t \cdot \sin k_n x$$

$$k_n = n \cdot \frac{\pi}{l}$$

$$\omega_n = v k_n, \quad v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

$$\Rightarrow \frac{\Delta n}{2} n = l$$

Основной тон колебаний - колебания, которые соответствуют числу $n=1$.

$$y_1(x,t) = \text{const} \cdot \sin \nu_1 t \cdot \sin k_1 x$$

$$k_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \omega_1 = \nu k_1, \quad \nu = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

~~Основной тон~~ **Обертоны** - при $n=2, 3, \dots$

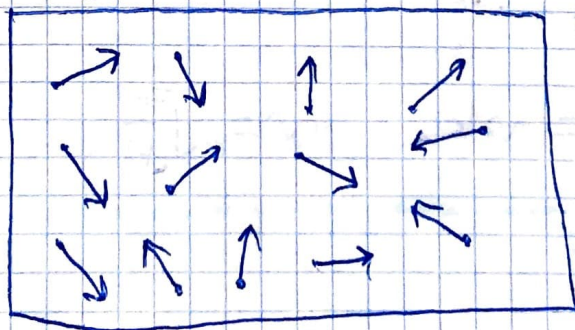


Узлы и пучности стоячей волны:

~~узлы~~ **Узлы** - точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю:

Пучности - точки, в которых амплитуда волны максимальна.

§ 39. Случайные волны и вероятности.



Случайное событие - это событие, исход которого нельзя предсказать заранее, но наблюдение которого можно многократно повторить.

Вероятность случайного события - это отношение числа появления события в серии испытаний к полному числу испытаний в пределе, когда число испытаний стремится к бесконечности.

$$p(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} \Rightarrow 0 \leq p \leq 1$$

Аксиома сложения вероятностей - вероятность наступления одного из взаимноисключающих событий равна сумме их вероятностей.

$$p(A+B) = p(A) + p(B)$$

Пример (грань кубика):

$$p(2+4+6) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{2}$$

Аксиома умножения вероятностей - вероятность наступления независимых случайных событий равна произведению их вероятностей.

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$$

Пример (два игральные кубика):

$$p(1 \cdot 1) = p(1) \cdot p(1) = \frac{1}{36}$$

Случайная величина - величина, значение которой нельзя предсказать заранее, но измерение которой можно многократно повторить.
(например, координата Броуновской частицы)

Дискретными наз-ся величины, которые могут принимать конечные или бесконечные, но счётные мн-во значений.

Непрерывной случайной величиной называют вел-ну, которая может принимать бесконечное и несчётное мн-во значений из некоторого интервала.

Распределение плотности вероятности - это ~~хар~~ отношение вероятности попадания случайной вел-ны в малый интервал Δx вблизи заданного значения к величине интервала в пределе, когда интервал стремится к нулю.

$$W(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x)}{\Delta x} \quad x - \text{сл. вел-на}$$

$$W(x) \geq 0$$

$$[W(x)] = \frac{1}{[x]}$$

Условие нормировки

$$\int W(x) dx = 1$$

инт-л берётся по всей области изменения случайной вел-ны

Среднее значение функции

Если у нас есть ф-ция $f(x)$ от величины x , то среднее значение ф-ции можно найти по формуле:

$$\langle f(x) \rangle \equiv \overline{f(x)} = \int f(x) w(x) dx$$

Среднее значение случайной величины

$$\langle x \rangle \equiv \bar{x} = \int x w(x) dx$$

Дисперсия случайной величины — это средний квадрат отклонения случайной величины от её среднего значения

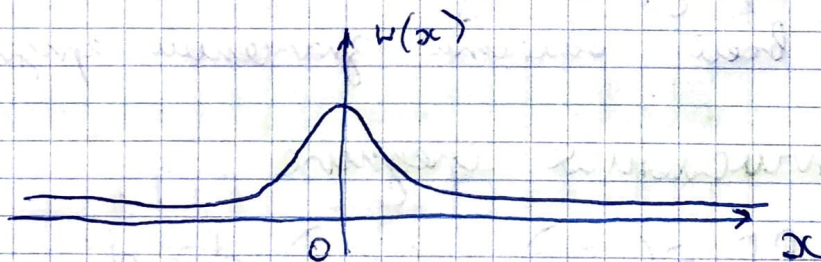
$$\sigma^2 = \int (x - \bar{x})^2 w(x) dx$$

дисперсия

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Гауссова случайная величина:

$$w(x) = C \cdot e^{-\lambda x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$



Интеграл Гауссова:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr^2 = \end{aligned}$$

$$= \pi \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Многомерная плотность вероятности — это отношение вероятности попадания нескольких случайных вел-и в малые интервалы вокруг заданных значений к произведению величин интервалов в пределе, когда все интервалы стремятся к нулю.

$$w(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{p(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$$

$$w(x, y) \geq 0$$

$$[w(x, y)] = \frac{1}{[xy]}$$

Условие нормировки:

$$\iint w(x, y) dx dy = 1$$

ит-и по всей области значений аргументов

Правило вычисления средних

$$\langle f(x, y) \rangle = \iint f(x, y) w(x, y) dx dy$$

Получение маргинального распределения:

$$w_1(x) = \int w(x, y) dy$$

$$w_2(y) = \int w(x, y) dx$$

Независимые случайные вел-ны:

В этом случае: $W(x, y) = W_1(x) \cdot W_2(y)$

§40. Распределение Гиббса.

Основной закон статистической механики равновесных систем: в состоянии термодинамического равновесия распределение плотности вероятности для различных состояний системы описывается формулой:

$$W(z) = C \cdot e^{-H(z)/kT}$$

распределение Гиббса (многомерная плотность)

$$z = q, p$$

$$C = \text{const}$$

$$H = K + \Pi \quad (\text{р-ен консервативные сис-ма})$$

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \quad \frac{\text{Дж}}{\text{град}} - \text{const. Больцмана}$$

$$T = t + 273 - \text{абсолютная темп. сис-ма}$$

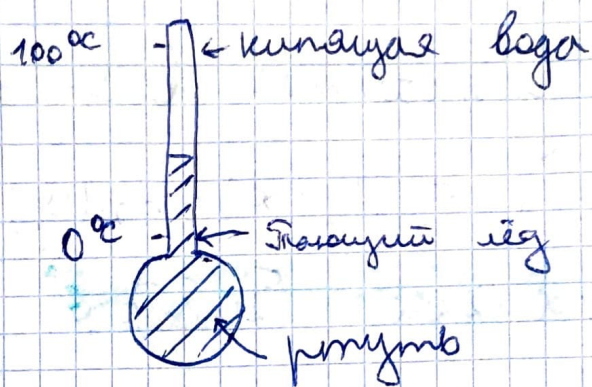
Термодинамическое равновесие:

$$\boxed{T_1} \boxed{T_2} \Rightarrow \boxed{T} \boxed{T}$$

Равновесие - состояние, в котором сис-ма, предоставленная самой себе, может находиться угодно долго.

Температура:

Единица изм. темп - градус Цельсия



Граус Цельсия - это $\frac{1}{100}$ часть интервала между температурой плавления льда и температурой кипения воды при нормальных условиях.

Абсолютная температура:

$$T = t + 273, \quad T [K]$$

Распределение молекул по скоростям -
распределение Максвелла.

T -ая ось молекулу.

$$W(v_x, v_y, v_z) = C \cdot \exp \left[- \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right]$$

$$W(v_x) = C \cdot \exp \left(- \frac{mv_x^2}{2kT} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(v_x) dv_x = 1$$

Дисперсия средней скорости молекулы

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 W(v_x) dv_x \quad (\langle v_x \rangle = 0)$$

$$dW(v_x) = W \left(- \frac{m}{2kT} \right) 2v_x dv_x$$

$$dW(v_x) = - \frac{m}{kT} W v_x dv_x$$

$$w v_x dv_x = - \frac{kT}{m} dw(v_x)$$

$$\begin{aligned} \langle v_x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 w(v_x) dv_x = - \frac{kT}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x dw(v_x) = \\ &= \underbrace{- \frac{kT}{m} v_x w(v_x) \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_0 + \frac{kT}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} w(v_x) dv_x = \left\{ \begin{array}{l} \text{условие} \\ \text{нормировки} \end{array} \right\} = \frac{kT}{m} \Rightarrow \boxed{\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}} \end{aligned}$$

Уравнение состояния идеального газа.

$$\boxed{\vec{N}, V, T, p}$$

Давление газа — отношение силы, действующей по нормали к поверхности к площади этой поверхности.

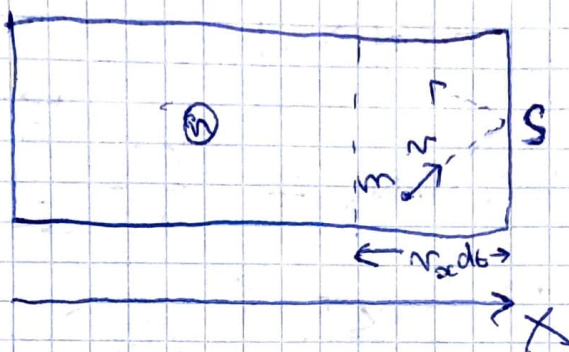
$$p = \frac{F}{S} \quad [\text{Па}]$$

$$\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

Паскаль — это давление, которое создаёт сила в 1 Н, действующая по нормали на площадь в 1 м².

Концентрация молекул газа — отношение числа молекул газа к объёму сосуда, в котором нах-ся газ.

$$n = \frac{N}{V} \quad [\text{м}^{-3}]$$



Группа молекул с определенной скоростью
между v_x и $v_x + dv_x$

Удельное, переданное молекулам при ударе
равно $2mv_x$

Продолжительность времени dt

Расстояние пройденное осью X : $v_x dt$

Объем: $S v_x dt$

Число молекул в этом объеме:

$$n S v_x dt$$

Вероятность заданного значения скорости:

$$w(v_x) dv_x$$

Число молекул с заданной скоростью:

$$n S v_x dt \cdot w(v_x) dv_x$$

Суммарный импульс, переданный молекулами:

$$2m v_x \cdot n S v_x dt \cdot w(v_x) dv_x$$

$$2mn S v_x^2 w(v_x) dv_x dt$$

Сила давления молекулы на стенку сосуда:

$$2mnS \cdot v_x^2 w(v_x) dv_x$$

Барометрическое давление газа - давление, которое создают на стенку сосуда молекулы газа, летящие с определённой скоростью.

$$dp = 2mn v_x^2 w(v_x) dv_x$$

Равное
давление: $p = \int dp$

$$p = 2mn \int_0^{+\infty} v_x^2 w(v_x) dv_x$$

(от 0 до $+\infty$, т.к. учитываем только те, что летят к стенке)

$$p = \int dp = \{ \text{т.к. другие члены} \} =$$

$$= mn \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 w(v_x) dv_x = mn \langle v_x^2 \rangle = nkT$$

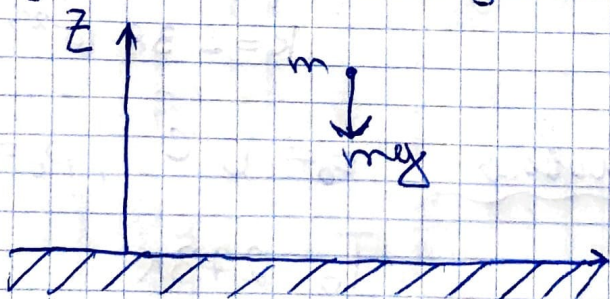
$$p = nkT$$

уравнение состояния
идеального газа

Распределение частиц во внешнем силовом поле - распределение Больцмана

$$w(x, y, z) = C \cdot \exp \left[- \frac{\Pi(x, y, z)}{kT} \right]$$

Распределение частиц в поле силы тяжести:



$$\Pi = mgz$$

$$W(z) = C \cdot e^{-mgz/kT}$$

Средняя высота растущего над поверхн. Земли:

$$\langle z \rangle = \int_0^{\infty} z W(z) dz$$

$$\text{] } z_0 = \frac{kT}{mg}$$

$$W(z) = C \cdot e^{-z/z_0}$$

$$dW(z) = W \left(-\frac{1}{z_0} \right) dz$$

$$W(z) dz = -z_0 dW(z)$$

$$\langle z \rangle = \int_0^{\infty} z W(z) dz = -z_0 \int_0^{\infty} z dW(z) =$$

$$= -z_0 \cdot \underbrace{z W(z)}_0 \Big|_0^{\infty} + z_0 \int_0^{\infty} W(z) dz = \text{учебное}$$

приравниваем $\text{?} = z_0 = \frac{kT}{mg}$

$$\langle z \rangle = \frac{kT}{mg}$$

§ 41. Давлен и масса молекулы

Масса молекулы воздуха m_0

Уравне сост. уг. газа: $p = n k T$, $n = \frac{N}{V}$
 $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{град}}$

Нормальные условия: $t_0 = 0^\circ\text{C}$, $p_0 = 10^5 \text{ Па}$
 $T_0 = 273 \text{ K}$

$$n_0 = \frac{p_0}{kT_0}$$

Число Лошмидта: $n_0 = 2.7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ -

концентрация молекул $\forall$ газа при норм. усл.

Плотность воздуха $\rho = \frac{m}{V}$

Плотность воздуха при норм. условиях:

$$\rho = \rho_0 = 1.3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad (\text{экспериментально})$$

$$m = N m_0$$

$$\rho_0 = \frac{N m_0}{V} = n_0 m_0 \Rightarrow m_0 = \frac{\rho_0}{n_0}$$

$$m_0 = \frac{1.3}{2.7 \cdot 10^{25}} \text{ кг} = 0.5 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$$

Размер молекулы воздуха

$$V_0 = d_0^3, \quad d_0 - \text{диаметр мо-л}$$

Плотность вещества в молекуле будем считать, как плотность вещества в жидком состоянии. (сначала газ)

$$\frac{m_0}{V_0} \approx \rho_{\text{ж}}$$

Плотн. возд. в жидком состоянии

$$\rho_{\text{ж}} = 0.9 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\rho_{\text{ж}} \approx \frac{m_0}{d_0^3}$$

$$d_0 = 3 \sqrt{\frac{m}{\rho c}}$$

⇒ диаметр молекулы воздуха:

$$d_0 = 3.8 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 3.8 \text{ Å}$$

Анстрем

$$\text{Å} = 10^{-10} \text{ м}$$

Средняя скорость теплового движения молекулы воздуха

$$v_T = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}$$

$$v_T = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

$$v_T \approx 300 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Среднее время свободного пробега молекулы воздуха

$$\tau_c = 1.2 \cdot 10^{-10} \text{ с}$$

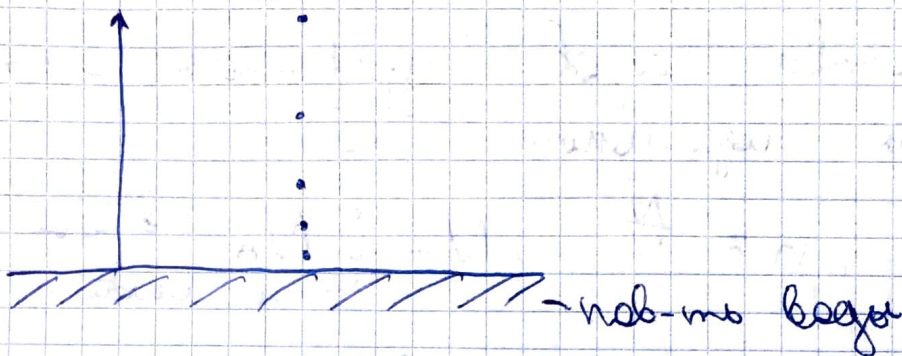
(связано со столкновениями)

§ 42. Измерение постоянной Больцмана

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{град}}$$

Брауновское движение — движение частиц взвешенной пылины в воде, которое можно наблюдать с помощью микроскопа.

Опыт Стефена



$$\langle z \rangle = \frac{KT}{mg}$$

Параметры сферической растущей:

$$V = \frac{\pi d^3}{6} \rho$$

$$m = \rho V$$

Сила Архимеда, действующая на растущую:

$$F_A = \rho_0 V g$$

Средняя высота сферической растущей:

$$\langle z \rangle = \frac{6KT}{(\rho - \rho_0)\pi d^3 g}$$

$$K = \langle z \rangle \frac{(\rho - \rho_0)\pi d^3 g}{6T}$$

Численные данные:

$$\rho = 1.2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\rho_0 = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$d = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\langle z \rangle = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

$$T = 300 \text{ К}$$

$$g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\Rightarrow K \approx 1.3 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{м}^3 \cdot \text{гравитация}}$$

Задача, погнбвернегарснне распрелеленне Тнббса!

1) Свнйства газон (уравненне состоннне и законн идеального газон)

$$p = nkT, \quad n = \frac{N}{V}, \quad N = \gamma N_A$$

число молекул в одной моле
число молекул

Число молекул газа: $\gamma = \frac{m}{\mu}$ масса одного моле

Число Авогадро: $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$

Универсальная газовая постоянная: $R = k N_A$

$$R = 8.31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{град}}$$

Уравнение Менделеева - Клапейрона -

объединенный закон газового состояния

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

2) Распределение воздуха в атмосфере Земли

Вероятность найти молекулу в данной точке пространства

$$W(z) = C \cdot \exp\left(-\frac{m_0 g z}{kT}\right)$$

концентрация молекул в данной точке

$$n(z) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{m_0 g z}{kT}\right)$$

средняя высота молекул воздуха

$$n(z) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right)$$

$$z_0 = \frac{kT}{m_0 g}$$

Средняя высота молекул воздуха

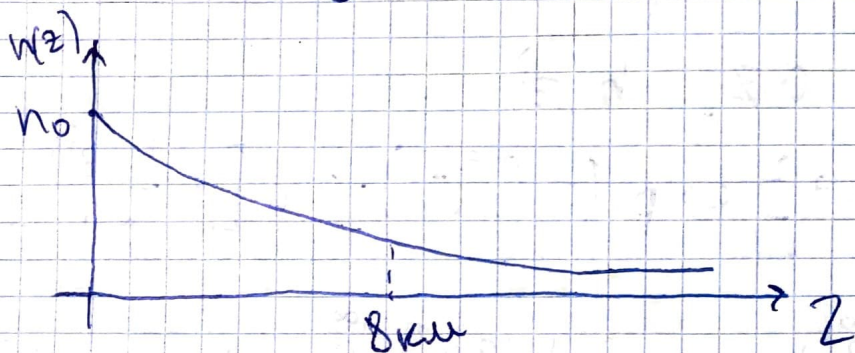
$$z_0 = \langle z \rangle$$

числа аргумента:

$$T = 273 \text{ K}, \quad m_0 = 0.5 \cdot 10^{-25} \text{ кг}, \quad g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{град}}$$

$$\Rightarrow z_0 \approx 8 \text{ км}$$



§ 43. Распределение энергии по степеням свободы.

Закон равнораспределения энергии по степеням свободы - в состоянии термодинамического равновесия на каждую квадратичную степень свободы приходится в среднем одинаковая энергия равная $\frac{kT}{2}$.

Квадратичная степень свободы - переменная, вклад которой вHamiltonian системы пропорционален квадрату этой переменной

$$H(z) = a z_1^2 + h(z')$$

$$z = z_1, z'$$

$$a = a(z') \text{ либо const}$$

Пример: частица в потенциальном силовом поле.

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z)$$

Док-бу мегеруу:

$$\langle a z_1^2 \rangle = \int a z_1^2 w(z) dz$$

$$w(z) = C \cdot \exp \left[-\frac{H(z)}{kT} \right] \quad \text{нормалдуу сис-ма
б мегеруу. палубеери}$$

$$H(z) = a z_1^2 + h(z)$$

$$\langle a z_1^2 \rangle = C \int_{-\infty}^{+\infty} a z_1^2 \exp \left(-\frac{a z_1^2}{kT} \right) \cdot \exp \left[-\frac{h(z)}{kT} \right] dz$$

$$\langle a z_1^2 \rangle = C \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \exp \left[-\frac{h(z')}{kT} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} a z_1^2 \exp \left(-\frac{a z_1^2}{kT} \right) dz_1$$

$$d \exp \left(-\frac{a z_1^2}{kT} \right) = -2 \frac{a z_1}{kT} \exp \left(-\frac{a z_1^2}{kT} \right) dz_1$$

$$a z_1 \exp \left(-\frac{a z_1^2}{kT} \right) dz_1 = -\frac{kT}{2} d \left(-\frac{a z_1^2}{kT} \right)$$

$$a z_1^2 \exp \left(-\frac{a z_1^2}{kT} \right) dz_1 = -\frac{kT}{2} z_1 d \left(-\frac{a z_1^2}{kT} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a z_1^2 \exp \left(-\frac{a z_1^2}{kT} \right) dz_1 = -\frac{kT}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} z_1 d \exp \left(-\frac{a z_1^2}{kT} \right) =$$

$$= -\frac{kT}{2} \left(\underbrace{z_1 \exp \left(-\frac{a z_1^2}{kT} \right)}_{=0} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{a z_1^2}{kT} \right) dz_1 \right) =$$

$$= \frac{kT}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{a z_1^2}{kT} \right) dz_1 \Rightarrow$$

$$\langle a z_1^2 \rangle = \frac{kT}{2} \cdot C \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \exp \left[-\frac{h(z')}{kT} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{a z_1^2}{kT} \right) dz_1 =$$

$$= \frac{kT}{2} \cdot C \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{h(z')}{kT} - \frac{a z_1^2}{kT} \right] dz =$$

$$= \frac{kT}{2} \cdot C \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{H(z)}{kT} \right] dz = \frac{kT}{2} \int w(z) dz = \frac{kT}{2} \quad \square$$

"1 (you normalized)"

Т.е. $\langle \alpha z_1^2 \rangle = \frac{kT}{2}$ или $E = \frac{kT}{2}$

Температура как мера средней кинетической энергии молекулы (из $E = \frac{kT}{2}$)

Внутренняя энергия идеального газа:

(идеальный газ - газ невзаимодейств. частиц)
(внутренняя энергия - энергия движения и взаимодействия частиц, составляющих систему)

$$U = \langle H \rangle, \quad H = K + \Pi$$

В идеальном газе $\Pi = 0 \Rightarrow H = K \Rightarrow$

$$U = \langle K \rangle = N \langle K_0 \rangle$$

или энергия одной частицы системы

$$E = \frac{kT}{2}; \quad K_0 = S \frac{kT}{2}$$

число кв. степеней свободы молекулы

$$U = N S \frac{kT}{2}$$

Теплоёмкость идеального газа и строение молекулы газа:

Теплоёмкостью тела (газа) наз-ся отношение приращенной теплоты к приращению температуры

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

Первый закон термодинамики - теплота, полученная системой идёт на увеличение внутренней энергии и на совершение работы.

$$dQ = du + dA$$

Идеальная газ: $dA = p dV$

Изо T-у процессу изохорный процесс:

$$V = \text{const} \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow dA = 0$$

И масса $dQ = du$

Теплоемкость газа при изохорном процессе:

$$C_V = \frac{du}{dT}$$

$$u = Ns \frac{KT}{2} \Rightarrow du = Ns \frac{K}{2} dT$$

$$C_V = \frac{1}{2} N K s \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$N = \nu N_A$$

$$C_V = \frac{1}{2} \nu R s, \quad R = K N_A$$

$$s = \frac{2C_V}{\nu R}$$

$s=3$

$s=5$

$s=6$

$s=6$

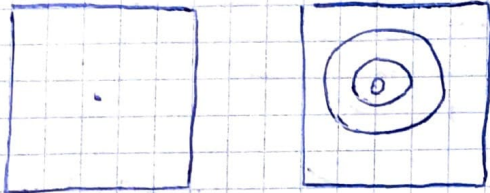
Для газа $s=5 \Rightarrow$

молекула газа



§44. Диффузия и непереносимость

Диффузия - это проникновение одного вещества в другое.

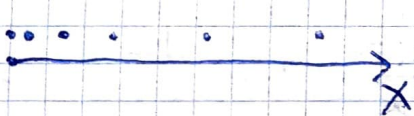


Закон диффузии - плотность потока частиц пропорциональна градиенту их концентрации.

$$j_x = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

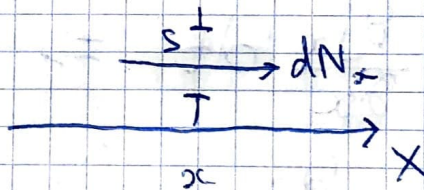
плотность потока частиц коэффициент диффузии

$$n = \frac{N}{V} \quad [\text{м}^{-3}]$$



$$j_x = \frac{dN_x}{S dt}$$

dN_x



dN_x - число частиц, которое проходит в напр. осн Ox через площадь S за время dt .

$$\frac{dN_x}{S dt} = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

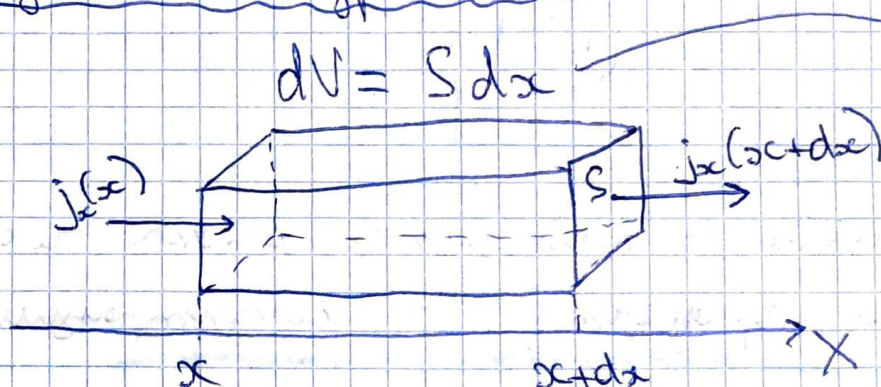
Коэффициент диффузии - коэффициент пропорциональности между плотностью потока частиц и градиентом их концентрации.

$$D \quad \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right]$$

Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$$

Рассуждение относительно уравнения:



$$j_x = \frac{dN_x}{S dt}$$

$$dN = j_x(x) S dt - j_x(x+dx) S dt$$

$$dN = - \frac{\partial j_x}{\partial x} dx \cdot S dt = - \frac{\partial j_x}{\partial x} dV \cdot dt \Rightarrow$$

$$dn = - \frac{\partial j_x}{\partial x} dt \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$$

Уравнение непрерывности:

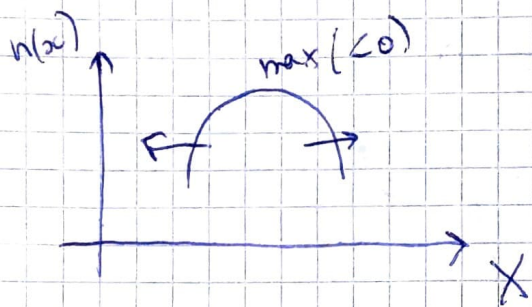
$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

Поток, как найденное относительно уравнения:

$$\text{Из уравнения непрерывности} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x}$$

$$\text{Из закона непрерывности} \Rightarrow j_x = - D \frac{\partial n}{\partial x}$$

Флора $\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(-D \frac{\partial n}{\partial x} \right) = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$

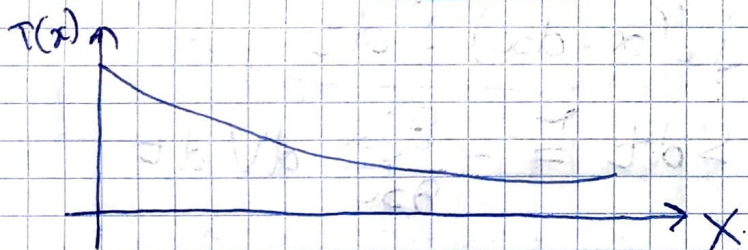


Теплопроводность - процесс переноса тепла в неоднородно нагретом теле.

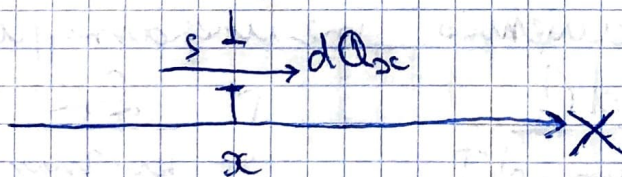
Закон теплопроводности - плотность потока тепла пропорциональна градиенту температуры

$$\vec{j}_x = -K \frac{\partial T}{\partial x}$$

плотность потока тепла коэффициент



$$j_x = \frac{dQ_x}{S dt}$$



$$\frac{dQ_x}{S dt} = -K \frac{\partial T}{\partial x}$$

Коэффициент теплопроводности - коэфф. пропорциональности между плотностью потока тепла и градиентом температуры

$K \left[\frac{Вт}{м \cdot град} \right]$

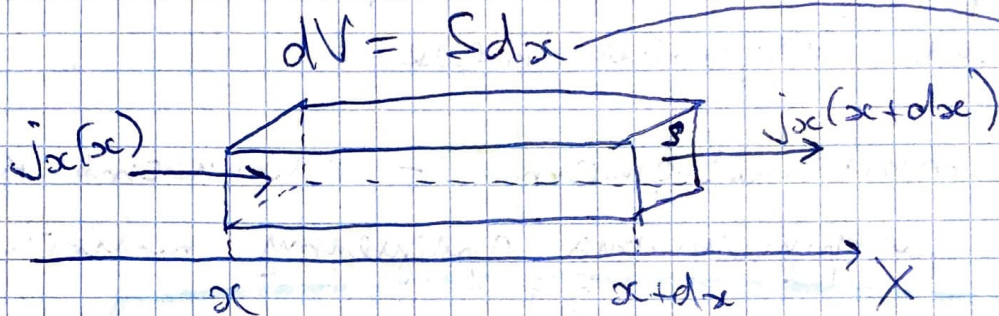
Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{c \rho} \cdot \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$$

c - удельная теплоемкость берг-ба

ρ - плотность берг-ба

Выведем это уравнение:



$$j_x = \frac{dQ_x}{S dt}$$

$$dQ = j_x(x) S dt - j_x(x+dx) S dt$$

$$dQ = - \frac{\partial j_x}{\partial x} dx \cdot S dt = - \frac{\partial j_x}{\partial x} dV dt$$

Удельная теплоемкость - отношение количества теплоты Q к массе m gained substance m through ΔT temperature change ΔT

$$c = \frac{dQ}{dm \cdot dT} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$$

$$dQ = dm \cdot c \cdot dT$$

Плотность $\rho = \frac{dm}{dV} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$

$$dm = \rho dV \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} dQ &= p \, dV \cdot c \cdot dT \\ dQ &= - \frac{\partial j_x}{\partial x} dV dt \end{aligned} \right\} \Rightarrow p \cdot c \cdot dT = - \frac{\partial j_x}{\partial x} \cdot dt \Rightarrow$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{1}{c \cdot p} \cdot \frac{\partial j_x}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{c \cdot p} \cdot \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$$

Уравнение непрерывности:

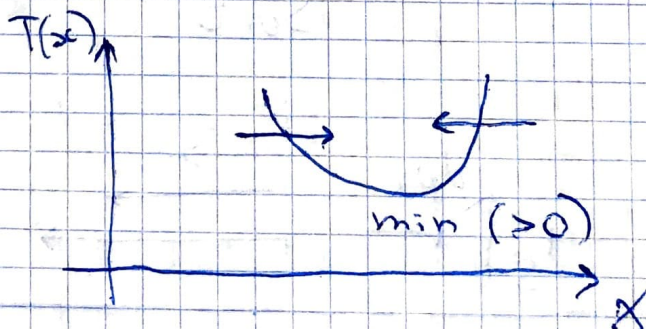
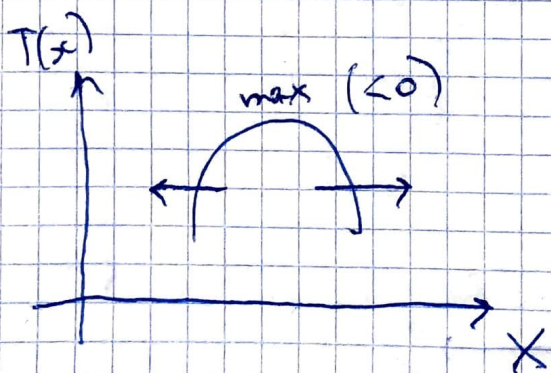
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c \cdot p} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Получаем, как его получить:

Из уравнения непрерывности $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{1}{c \cdot p} \cdot \frac{\partial j_x}{\partial x}$

Из закона непрерывности $\Rightarrow j_x = - \kappa \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$

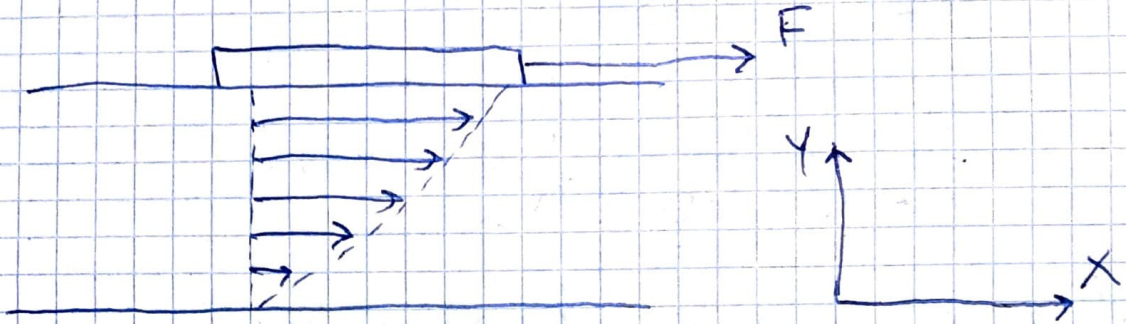
Получа $\frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{1}{c \cdot p} \frac{\partial j_x}{\partial x} = - \frac{1}{c \cdot p} \frac{\partial}{\partial x} \left(- \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) =$
 $= \frac{\kappa}{c \cdot p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$



§45. Вязкость жидкостей

Вязкость - св-во жидкости препятствовать движению соприкасающихся с ней тел

Сдвиговой поток - поток, в котором



скорость частиц v_x зависит от координаты y .

$$v_x = v_x(y)$$

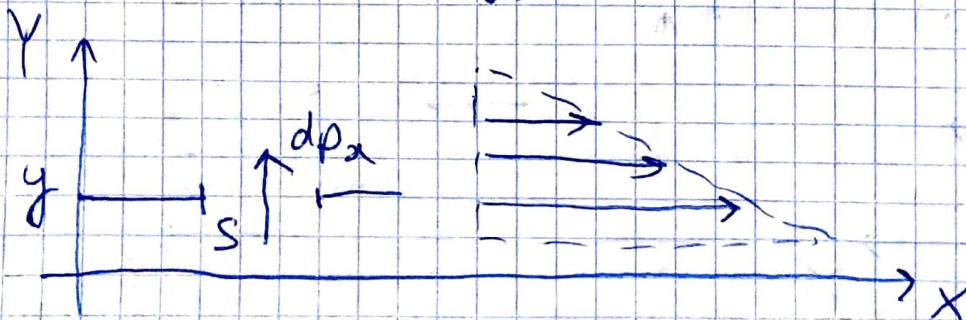
Закон вязкости - плотность потока j_x пропорциональна градиенту скорости.

$$j_x = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

плотность потока j_x коэффициент вязкости η

$$j_x = \frac{dp_x}{S dt}$$

гидравлический напор dp_x



$$\frac{dp_x}{S dt} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Коэффициент вязкости — коэфф. пропорциональности между плотностью потока и градиентом скорости.
 η [Па·с]

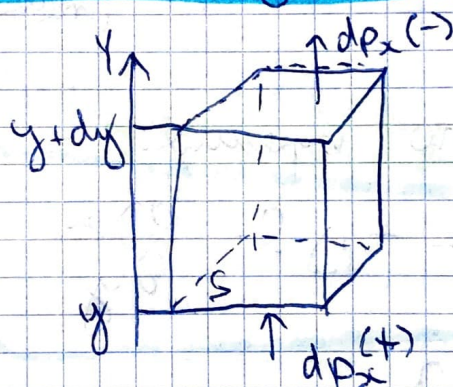
Пример: коэфф. вязкости воды

$$\eta = 10^{-3} \text{ Па·с}$$

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial j_x}{\partial y} = 0$$

$$j_x = \frac{dp_x}{S dt}$$



$$\begin{aligned} dp_x &= j_x(y) S dt - j_x(y+dy) S \cdot dt = \\ &= S dt \cdot \left(-\frac{\partial j_x}{\partial y} \right) dy = \{ S dy = dV \} = \\ &= -\frac{\partial j_x}{\partial y} dV \cdot dt \quad (**) \end{aligned}$$

или $dp_x = dm \cdot dv_x$; $dm = \rho dV$

$$\Rightarrow dp_x = \rho dV \cdot dv_x \quad (*)$$

(*) и (**)
 $\Rightarrow$

$$\rho dv_x = -\frac{\partial j_x}{\partial y} dt$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial j_x}{\partial y} = 0$$

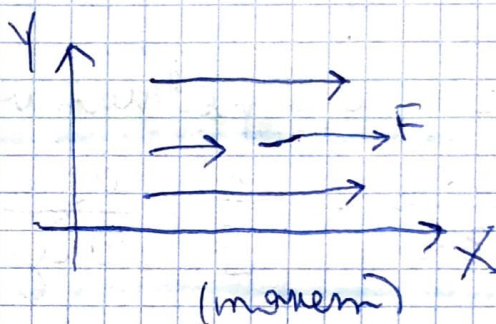
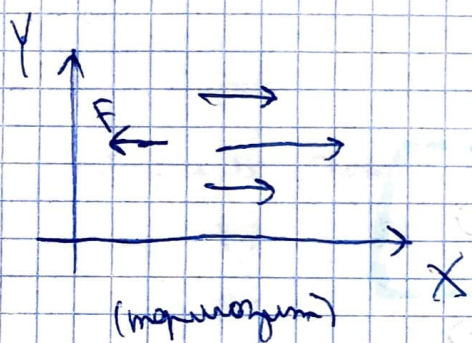
Уравнение движения вязкой жидкости

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

(v_x - скорость частицы)

$$\Delta \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial j_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(-\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial^2 y} \quad \square$$



Сила вязкого трения:

$$F_x = -\eta S \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\Delta \quad \frac{dp_x}{S dt} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x$$

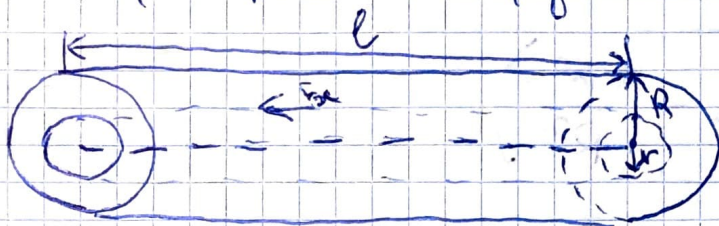
$$\frac{F_x}{S} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$F_x = -\eta S \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad \square$$

Сила вязкого трения приложена к двум жидкостям, находящимся выше и ниже пластины (см. рис)

§ 46. Движение вязкой жидкости

Движение вязкой жидкости по трубе
 $v = \text{const}$, $\eta = \text{const}$, движение равномерно



Из-за того, что $v = \text{const}$, то скорость гв. y -м.
 η не зависит от y $\Rightarrow$ не зависит от y

Δp — разность давлений на концах цилиндра

$$F_x = -\eta S \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad S - \text{поверхность цилиндра}$$

$$\Delta p \cdot \pi r^2 + \eta S \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \text{м.к. скорость зависит от координаты } r \right)$$

$$S = 2\pi r l$$

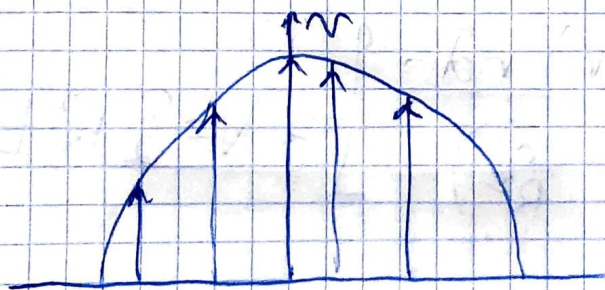
$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r$$

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r dr$$

$$\int_{v_0}^v dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} \int_0^r r dr \Rightarrow v = v_0 - \frac{\Delta p}{4\eta l} r^2$$

на оси симметрии

Параболический профиль скорости



$$n(R) = 0 \Rightarrow$$

$$n_0 = \frac{\Delta p}{4\eta} R^2$$

$$n(r) = n_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Теперь посчитаем кол-во жидкости, которое протекает через поперечное сечение трубы за определенное время

Формула Пуазейля

t — время

r
радиус тонкого
кольцевого слоя

dr
толщина слоя



Посчитаем кол-во жидкости, протекающей через тонкий кольцевой слой. (dr)

$$n(r)$$

$$\text{или с помощью } 2\pi r \cdot dr$$

$$dV = 2\pi r \cdot dr \cdot n(r) \cdot t$$

$$V = \int dV$$

$$V = 2\pi t \int_0^R n(r) r dr$$

$$n(r) = n_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \Rightarrow V = \frac{\pi}{2} R^2 t n_0$$

$$V = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \Delta p \cdot t$$

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \Delta p \quad - \text{объёмная скорость потока}$$

- Объёмная плотность потока пропорциональна приложенной разности давлений.

§ 47. Уравнения динамики сплошной среды

Рассмотрим в качестве примера распространение звука в сплошной среде. Будем считать, что звуковая волна будет бегать в одном направлении (длинная трубка).

Переменные и параметры, характеризующие звуковую волну:

$$x \text{ [м]}, \quad t \text{ [с]}$$

координата

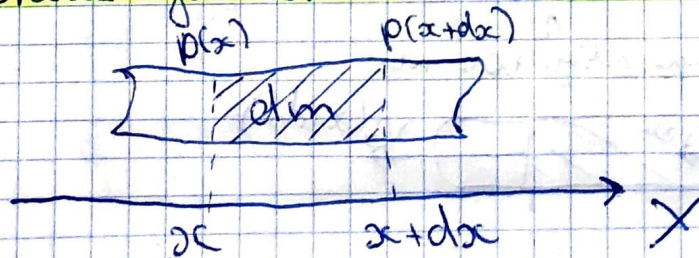
$$v_x \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right], \quad p \text{ [Па]}$$

давление в данной точке среды

$$\rho \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$$

плотность в данной точке

Уравнения движения элемента сплошной среды



$$dm = \rho \int dx$$

на го непрерывно распределен

$$F_x(x) = Sp(x)$$

$$F_x(x+dx) = -Sp(x+dx)$$

$$F_x = F_x(x) + F_x(x+dx)$$

$$F_x = Sp(x) - Sp(x+dx)$$

$$F_x = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

По II з. Ньютона:

$$dm \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} = F_x$$

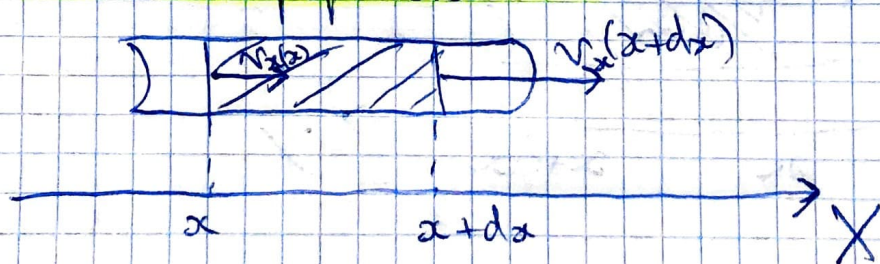
$$dm \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

$$\rho S dx \frac{\partial v_x}{\partial t} = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Уравнение непрерывности



левая граница $dm^{(+)} = \rho(x) S v_x(x) dt$

правая граница $dm^{(-)} = \rho(x+dx) S v_x(x+dx) dt$

$$dm = dm^{(+)} - dm^{(-)} =$$

$$= [\rho(x) v_x(x) - \rho(x+dx) v_x(x+dx)] S dt$$

$$dm = - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx \cdot S dt$$

$$S dx = dV$$

$$\frac{dm}{dV} = d\rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} = 0}$$

Уравнение сохранения массы

$$\boxed{p = p(p)}$$

- задаваем давление и температуру

Система уравнений гидродинамики сплошной среды

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$p = p(p)$$

§48. Звуковая волна

Грибление слабой звуковой волны

Это значит, что изменение параметров среды звуковой волна небольшая, по сравнению с равновесными значениями этих параметров.

В-ии распространение звука в воздухе. Если звука нет, то воздух характеризуется равновесными параметрами: ρ_0 , p_0 . А когда идет звуковая волна, то происходит возмущение этих параметров: ρ' , p' изменение.

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$|\rho'| \ll \rho_0$$

$$p = p_0 + p'$$

$$|p'| \ll p_0$$

Линеаризация уравнений

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} = 0$$

$$\rho = \rho(p)$$

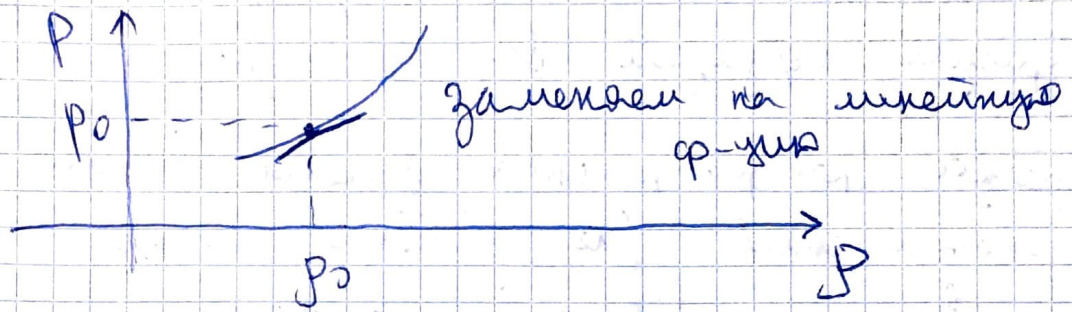
} $\Rightarrow$

$$\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

$$p' = \text{const} \cdot \rho'$$

3-е ур-ие следует из:



$$[const] = \left[\frac{p}{V} \right] = \frac{u^2}{c^2}$$

$const = c_0^2$ - квадрат некоторой скорости

$$p' = c_0^2 - p'$$

Вариантное уравнение

$$p_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{продифференцируем по} \\ \text{времени} \end{array} \right.$$

$$p_0 \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + c_0^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} \right) = 0 \quad \left\{ p' = c_0^2 \rho' \right.$$

$$\text{Из ур-ния непрерывности} \Rightarrow \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad \left. \right\} \Rightarrow$$

$$p_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} - c_0^2 \rho_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}$$

Скорость звука (из баз. ур-ния следует)

$$c_0 = \sqrt{\frac{p'}{\rho'}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Для адиабатического процесса

(процесс, идущий без доступа тепла)

Процесс распространения звуковой волны ~~адиабатический~~
адиабатический. (не успевает излучить теплообмен
эл-тов среды друг с другом)

$$c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} ; \quad \gamma = \frac{7}{5} \quad - \text{ для воздуха} \\ \text{(показатель адиабаты)}$$

$$p_0 = 10^5 \text{ Па}$$

$$\rho_0 = 1.3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\Rightarrow c_0 = 330 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$